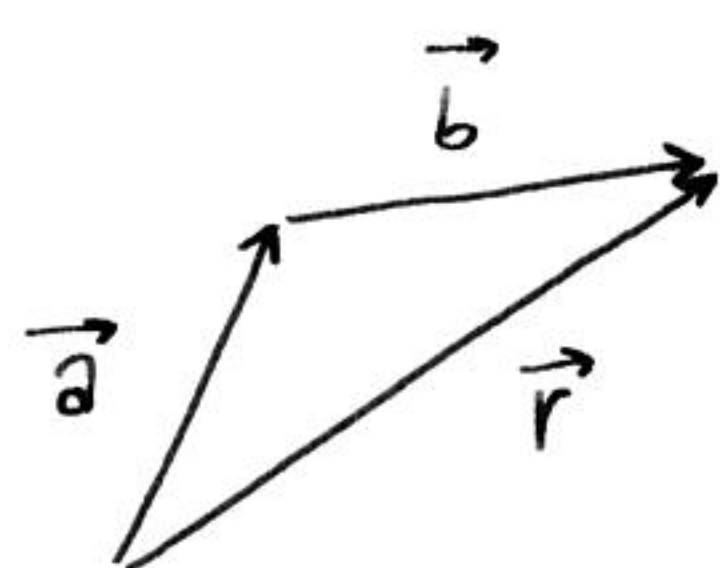


2 VETTORI



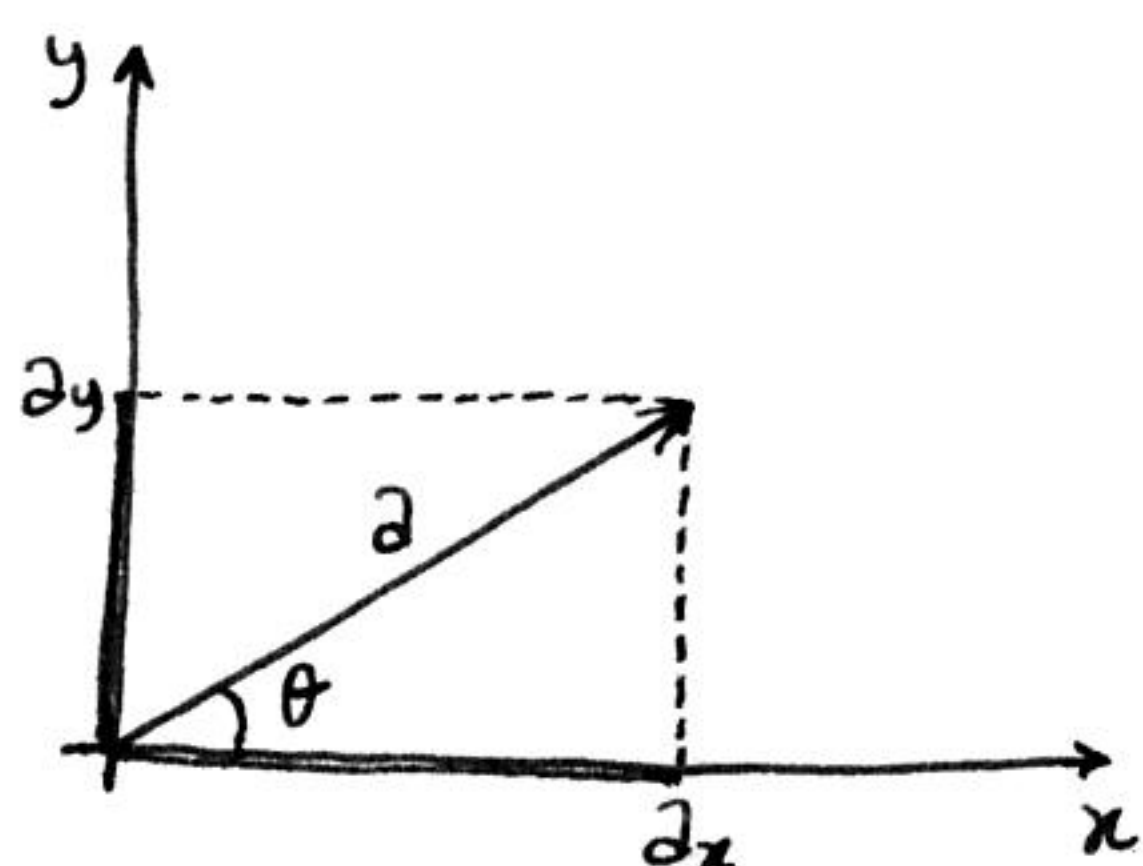
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{r}$$

$\vec{r}$ = risultante

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(\vec{d} + \vec{e}) + \vec{f} = \vec{d} + (\vec{e} + \vec{f})$$

$$\vec{e} - \vec{h} = \vec{e} + (-\vec{h})$$



$$a_x = a \cos \theta$$

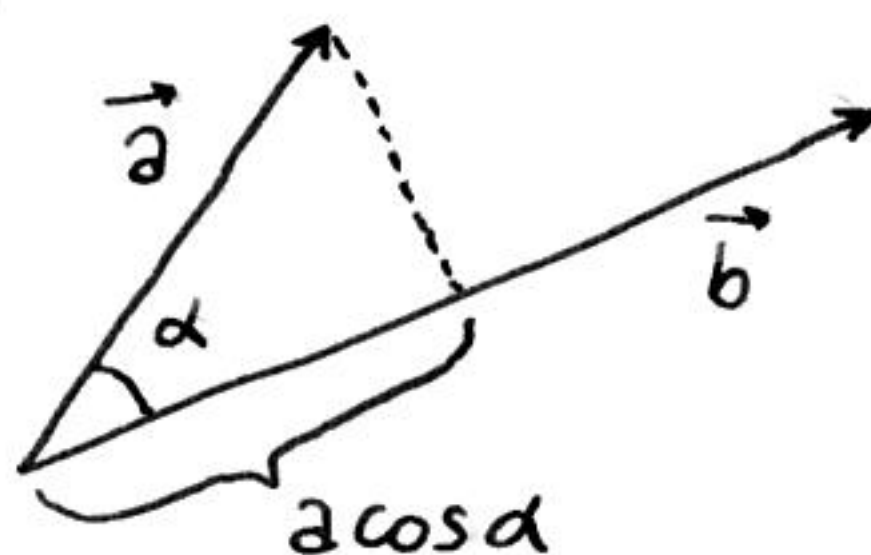
$$a_y = a \sin \theta$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\tan \theta = a_y / a_x$$

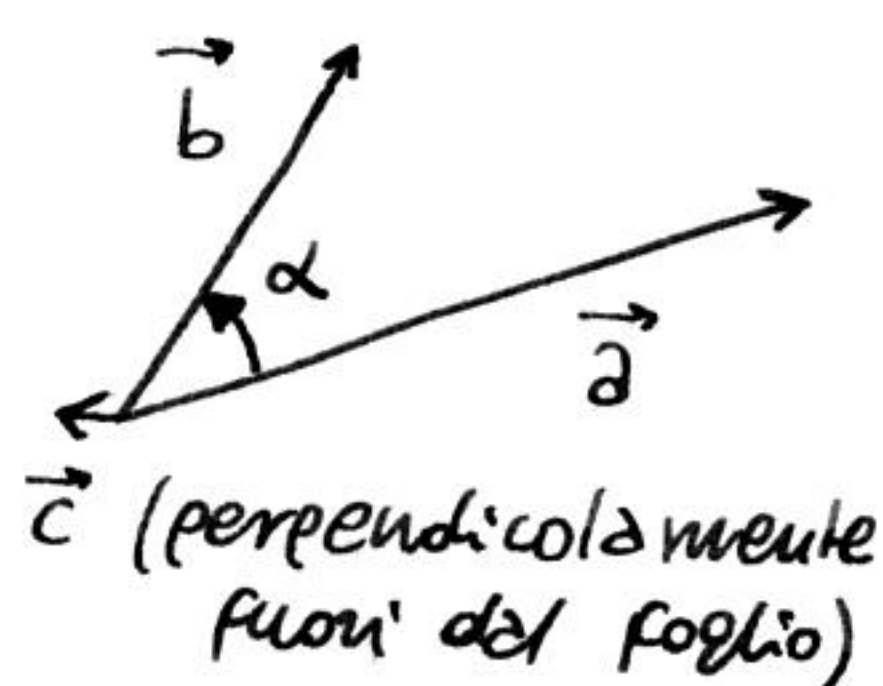
PRODOTTO SCALARE (il risultato è uno scalare)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$



PRODOTTO VETTORIALE (il risultato è un vettore)

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \quad |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$



REGOLA
DELLA
MANO
DESTRA

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

3 MOTO UNIDIMENSIONALE

MECCANICA $\left\{ \begin{array}{l} \text{CINEMATICA: descrive il moto dei corpi} \\ \text{DINAMICA: descrive il moto in funzione di forze e proprietà dei corpi} \end{array} \right.$

VELOCITÀ MEDIA:

$$\bar{V} = \frac{r}{t}$$

$$\text{velocità} = \frac{\text{spostamento}}{\text{tempo trascorso}}$$

la velocità
esprime la rapidità
dello spostamento nel tempo

VELOCITÀ ISTANTANEA:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} \quad (\text{derivata})$$

ACCELERAZIONE MEDIA:

$$\bar{a} = \frac{v}{t}$$

$$\text{accelerazione} = \frac{\text{velocità}}{\text{tempo trascorso}}$$

l'accelerazione
esprime la rapidità del
mutare della velocità
nel tempo

ACCELERAZIONE ISTANTANEA:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

EQUAZIONI CINEMATICHE

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

per $x_0 = 0$, $v_0 = 0$

$$v = at$$

$$x = \frac{1}{2}vt$$

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

$$v = \sqrt{2ax}$$

(MOTO RETTILINEO)

Dimostrazioni:

- $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0}$ da cui $v = v_0 + at$ [1]

- la velocità media è $\bar{v} = \frac{1}{2}(v + v_0)$ [2]

- $x = x_0 + \bar{v}t$ e sostituendo dalla [2] $x = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t$

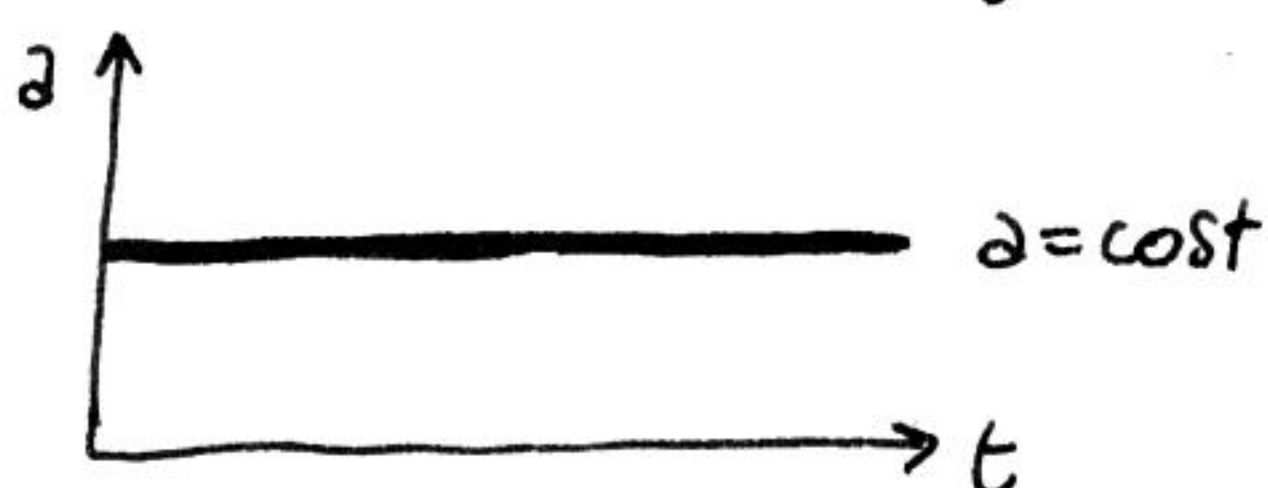
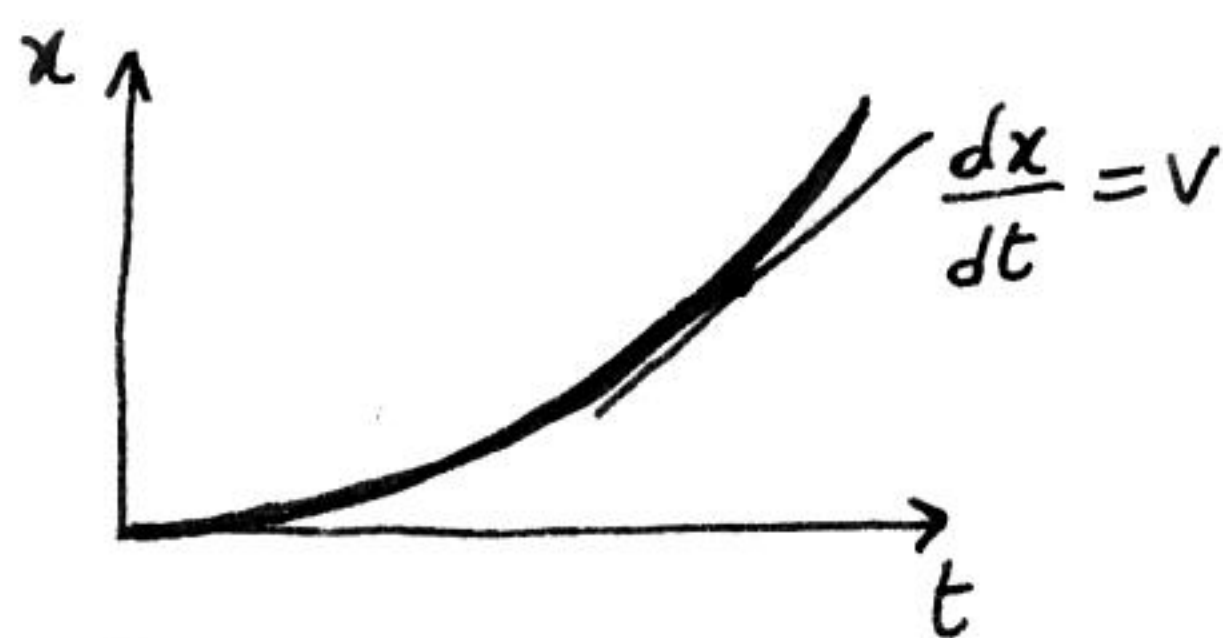
sostituendo in questa il valore di t dalla [1] si ha

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0) \frac{v - v_0}{a} = x_0 + \frac{1}{2a}(v^2 - v_0^2) = \\ &= x_0 + \frac{v^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a} \end{aligned}$$

$$v^2 = (x - x_0)2a + v_0^2$$

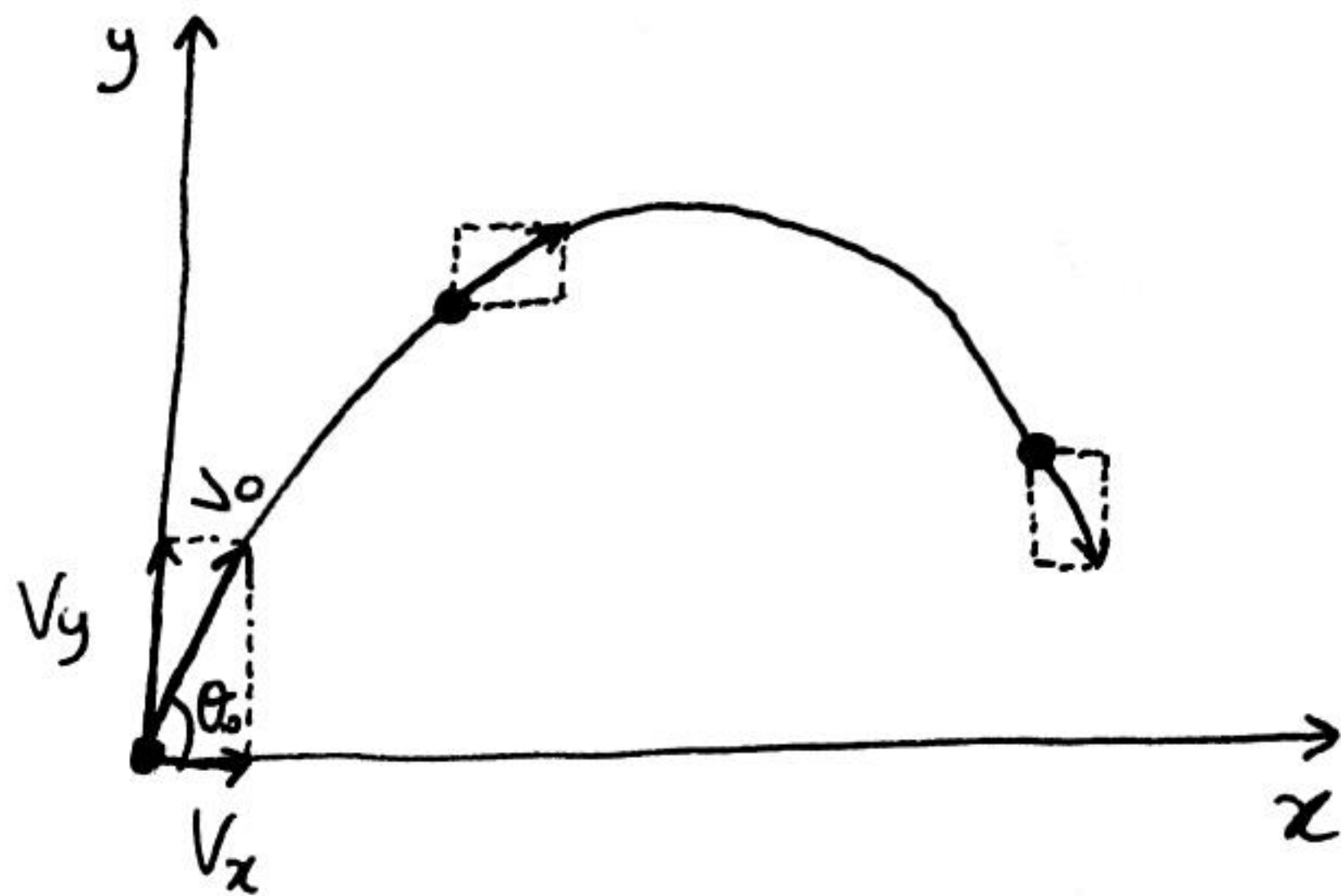
sostituendo in questa il valore di v dalla [1] si ha

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + at + v_0)t = \underline{x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$



4 MOTI PIANI

MOTO DI UN PROIETTILE



$$V_x = V_0 \cos \theta_0 \quad V_y = V_0 \sin \theta_0$$

$$\begin{cases} V_x = V_0 \cos \theta_0 \\ V_y = V_0 \sin \theta_0 - g t \end{cases}$$

...passando alla primitiva in t...

$$\begin{cases} x = V_0 \cos \theta_0 t \\ y = V_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

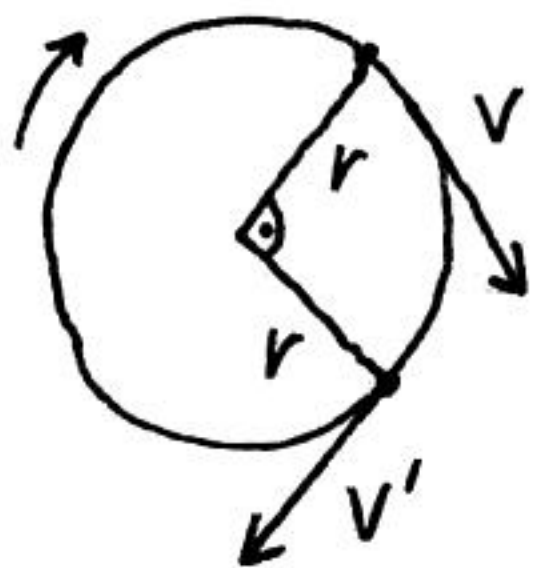
ricavando t dalla 1ª eq. e sostituendolo nella 2ª eq., si vede che la 2ª eq. ci dà una traiettoria che è una parabola

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

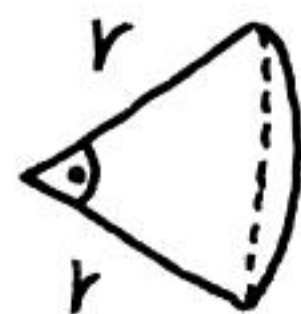
$$\tan \theta = \frac{V_y}{V_x}$$

-g perché l'accelerazione è diretta verso il basso

MOTO CIRCOLARE UNIFORME



①



②

(MISURA DELL' ARCO PERCORSO IN UN TEMPO Delta t)

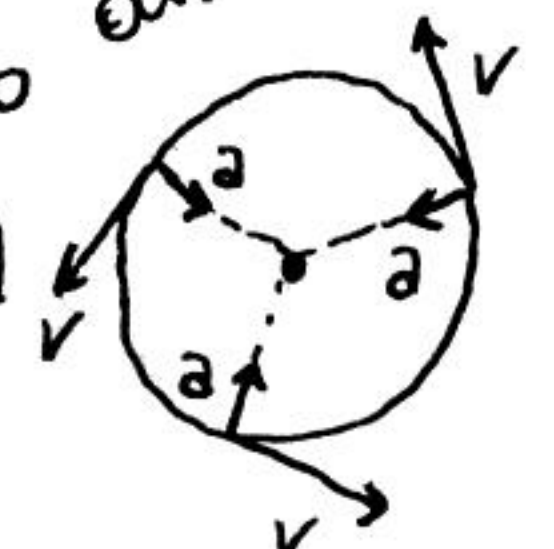
① e ② sono due triangoli isosceli simili, perciò

$$\frac{v}{\Delta v} = \frac{r}{v \cdot \Delta t} \quad (\text{approx.}) \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \quad (\text{approx.})$$

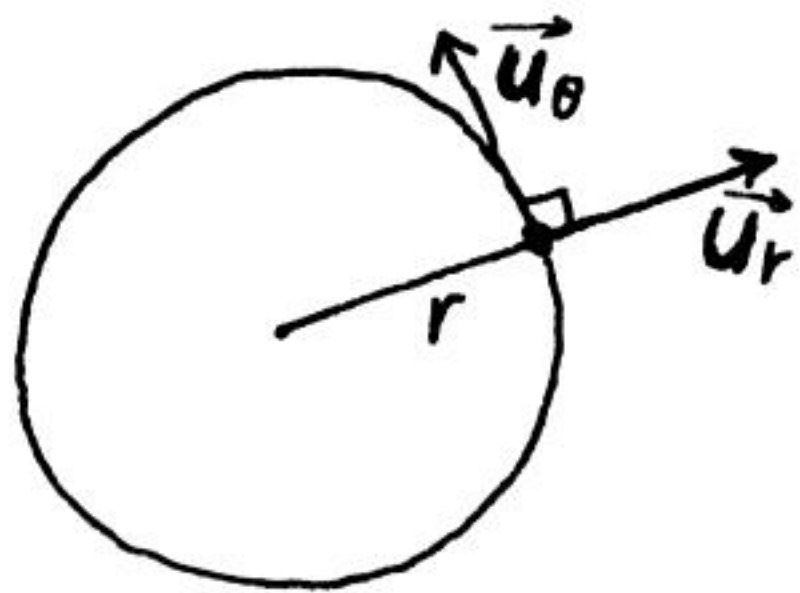
$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \quad (\text{esatto})$$

accelerazione centripeta $a = \frac{v^2}{r}$

la variazione della velocità (costante in modulo, ma non in direzione) produce un'accelerazione (costante in modulo, ma non in direzione, essendo diretta sempre verso il centro)



MOTO CIRCOLARE UNIFORME STUDIATO MEDIANTE VERSORI:

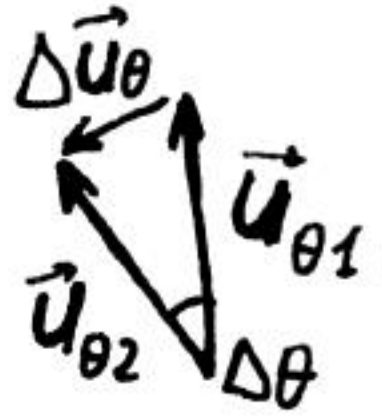


$\frac{dv}{dt}$ (variazione della velocità nel tempo) è nullo perché il moto è circolare uniforme

$$\vec{v} = \vec{u}_\theta \cdot v$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{u}_\theta \cdot v)}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} v + \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta \quad \vec{a} = \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} v$$

Consideriamo $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$.



$\vec{u}_{\theta 1}$ e $\vec{u}_{\theta 2}$ è lo stesso versore, dopo un tempo $\Delta t (= t_2 - t_1)$.

Il vettore $\Delta \vec{u}_\theta (= \vec{u}_{\theta 2} - \vec{u}_{\theta 1})$ è diretto radialmente verso il centro, per $\Delta t \rightarrow 0$, cioè ha lo stesso verso di $-\vec{u}_r$.

Poiché $\vec{u}_{\theta 1}$ e $\vec{u}_{\theta 2}$ (versori) hanno modulo unitario, il modulo di $\Delta \vec{u}_\theta$ è $= \Delta \theta$.

$$\text{Perciò} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{u}_r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = -\vec{u}_r \frac{d\theta}{dt}$$

Consideriamo $\frac{d\theta}{dt}$.

$$\frac{d\theta}{dt} = \text{velocità angolare costante di rotazione del punto} = \frac{v}{r}$$

$$\text{Perciò} \quad \boxed{\vec{a} = -\vec{u}_r \frac{v^2}{r}}$$

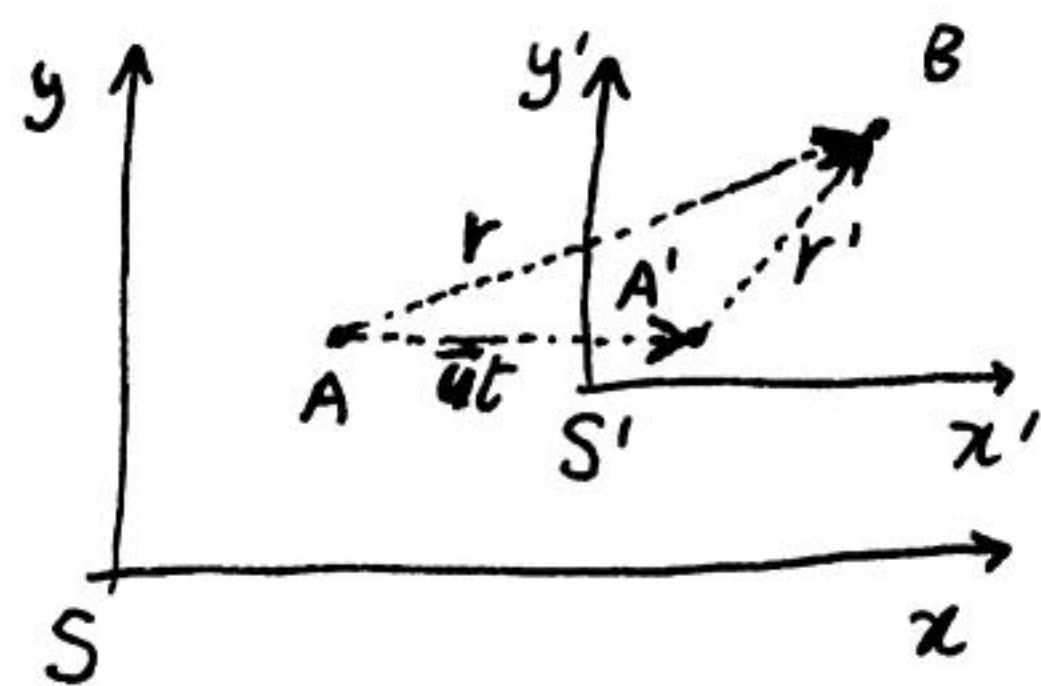
MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} v + \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta = -\vec{u}_r \frac{v^2}{r} + \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= a_T & \text{ACCELERAZIONE TANGENZIALE} & \left\{ \begin{array}{l} \text{tangente alla traiettoria, dipende} \\ \text{dalla variazione in modulo della} \\ \text{velocità} \end{array} \right. \\ \frac{v^2}{r} &= a_c & \text{ACCELERAZIONE CENTRIFUGA} & \left\{ \begin{array}{l} \text{diretta radialmente, dipende} \\ \text{dalla variazione in} \\ \text{direzione della velocità} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\text{modulo dell'accelerazione istantanea: } a = \sqrt{a_T^2 + a_c^2}$$

SISTEMI DI RIFERIMENTO S ED S'



$\vec{u}_t$ = spostamento del sist. di r.f. S' rispetto a S

$\vec{r}'$ = spostamento del punto materiale in S'

$\vec{r}$ = risultante del moto

$$\vec{u}_t + \vec{r}' = \vec{r}$$

Differenziando si ha:

$$\vec{u} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\vec{u}$ = velocità di S' rispetto a S

$\frac{d\vec{r}'}{dt}$ = velocità del punto materiale nel sist. di r.f. S' = $\vec{v}'$

$\frac{d\vec{r}}{dt}$ = velocità del punto materiale rispetto al sist. di r.f. S = $\vec{v}$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}' \quad \text{(TRASFORMAZIONI GAUKEIANE)}$$

In tutti i sistemi di riferimento che si muovono l'uno rispetto all'altro con velocità costante, l'accelerazione di un punto materiale è la stessa. Infatti, derivando l'eq. precedente:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{u}'}{dt}$$



a a'

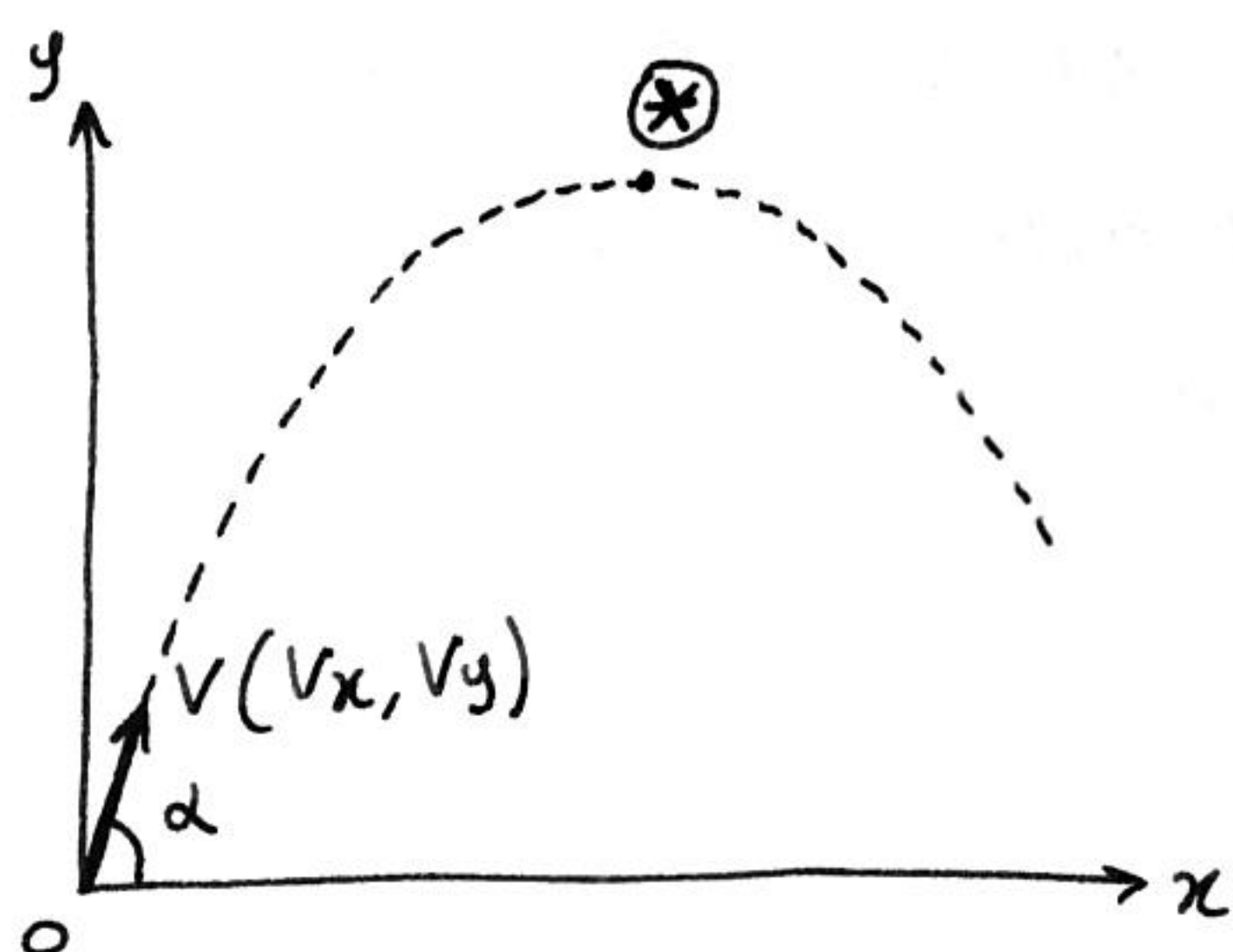
nullo, perché i sist. di r.f. si muovono l'uno rispetto all'altro con velocità costante

$$\text{Però } a = a'$$

SISTEMA INERZIALE: non sono presenti forze apparenti

SISTEMA NON INERZIALE: sono presenti forze apparenti

PROIETTILE LANCIATO DA UN CANNONE



$$\begin{cases} x = V_x t \\ y = V_y t + \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$V_x = V \cos \alpha$$

$$V_y = V \sin \alpha$$

il proiettile raggiunge l'altezza massima * quando la velocità è nulla

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 0 \quad V_y + \frac{1}{2} g (2t) = 0 \quad V_y + g t = 0 \quad t = -\frac{V_y}{g}$$

sostituendo nella y si ottiene $y = V_y \left(-\frac{V_y}{g}\right) + \frac{1}{2} g \frac{V_y^2}{g^2} = -\frac{1}{2} \frac{V_y^2}{g}$ ALTEZZA MASSIMA

sostituendo nella x si ottiene $x = V_x t = -\frac{V_y V_x}{g}$ ASCISSA DI ALTEZZA MASSIMA

la gittata è il doppio dell'ascissa di altezza massima, con $x = -\frac{2 V_y V_x}{g}$ GITTATA

quale deve essere l'angolazione α del cannone perché il proiettile diventi il più lontano possibile (gittata massima)?

occorre trovare il punto di massimo della funzione $x = -\frac{2 V_y V_x}{g}$ di gittata.

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2 V_y V_x}{g} = -\frac{2 V \sin \alpha V \cos \alpha}{g} = \frac{-2 V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \\ &= \frac{-2 V^2 \frac{\sin 2\alpha}{2}}{g} = -\frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} \end{aligned}$$

$$x \text{ è massima per } \sin 2\alpha = 1 \rightarrow 2\alpha = 90^\circ \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Si ha gittata massima per $\alpha = 45^\circ$ (in assenza d'aria).

In presenza d'aria, deve essere $\alpha > 45^\circ$, e tanto maggiore quanto più grande è V .

5 DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

DINAMICA: branca della meccanica classica
che si occupa delle cause del moto $\rightarrow$ leggi della forza

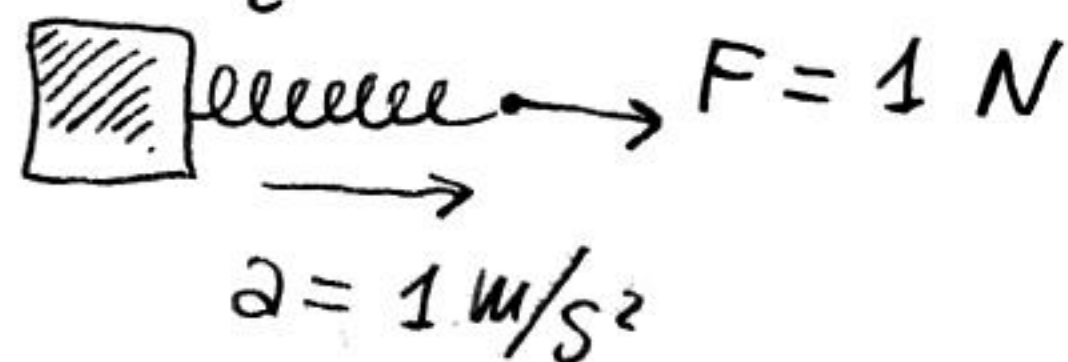
* I^a LEGGE DI NEWTON:

"Un corpo persiste nel suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme finché forze esterne ad esso applicate non lo costringano a mutare tale stato"

(principio di INERZIA, valido per sistemi inerziali)

quiete o moto rettilineo uniforme $\leftrightarrow$ accelerazione nulla

$$m = 1 \text{ kg}$$



il Newton è quella forza che
imprime a una massa di 1 kg
una accelerazione di 1 m/s²

massa: proprietà di un corpo che determina la sua resistenza ad una
variazione del suo stato di moto

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \quad \text{a parità di forza } F \text{ agente}$$

* II^a LEGGE DI NEWTON:

$$F = m \cdot a$$

(in essa è contenuta la I^a legge come caso particolare, perché se $F=0 \rightarrow a=0$
e il corpo persiste nel suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme)

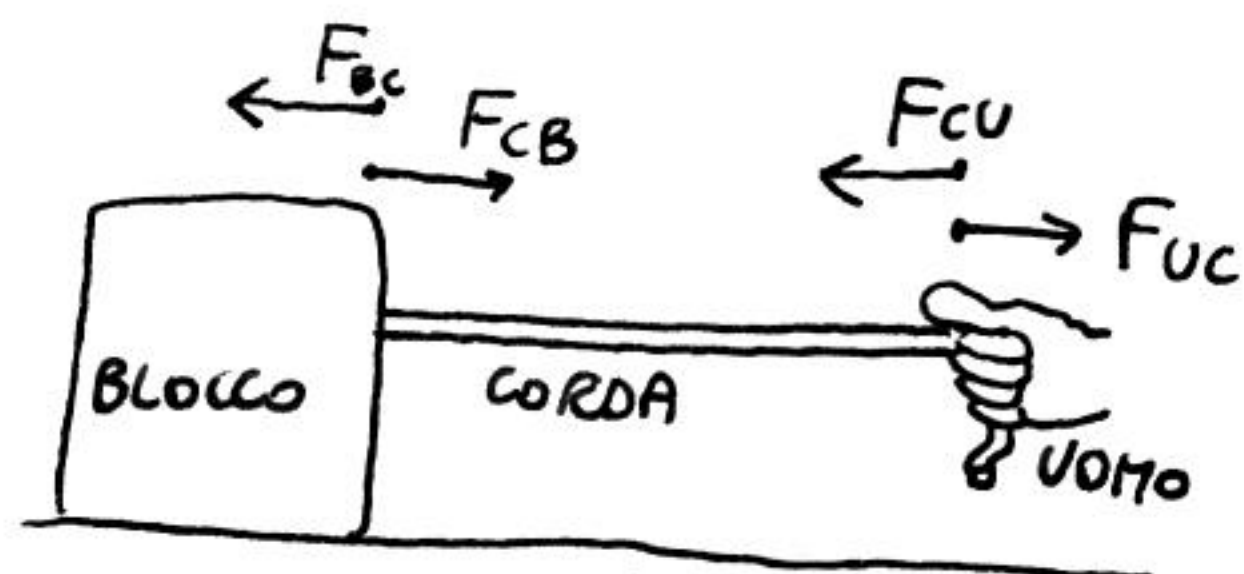
* III^a LEGGE DI NEWTON:

"Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria" $F_{12} = -F_{21}$

(le mutue azioni di due corpi sono sempre uguali e dirette in versi opposti,
ed entrambe le forze giacciono sulla retta che unisce i corpi)

Ogni singola forza è solo un aspetto della mutua interazione tra due corpi: quando un corpo esercita una forza su un altro, quest'ultimo ne esercita una uguale (in modulo) e contraria (in verso) sul primo.

Una forza è detta azione e l'altra reazione. Esse agiscono sempre su corpi differenti (altrimenti la risultante sarebbe nulla).

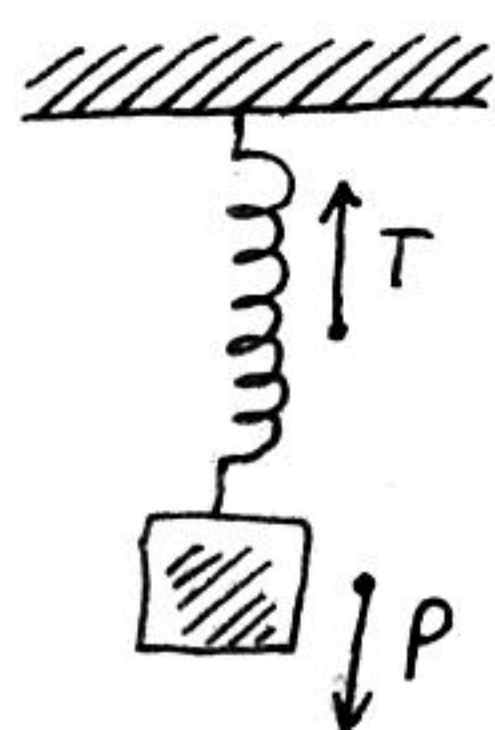


$$F_{cu} = -F_{uc} \quad F_{Bc} = -F_{cB}$$

$$m_c = \text{massa corda}$$

$$\vec{F}_{uc} + \vec{F}_{Bc} = m_c \vec{a} \quad \dots \text{e poiché agiscono sulla stessa retta} \dots$$

$$F_{uc} - F_{Bc} = m_c a$$



$$T = -P$$

(IN EQUILIBRIO)

T = tensione molla
P = peso blocco

la tensione della molla esprime in maniera efficace il peso del blocco

Sistema di unità	Forza	Valore
S.I.	N (newton)	$1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2$
cgs	dyn (dine)	$1 \text{ g} \cdot 1 \text{ cm/s}^2$
ingegner	kgf (chilogrammo-peso) o (chilogrammo-forza)	$1 \text{ kg} \cdot 9,8066 \text{ m/s}^2$

1 kgf = forza con la quale la Terra attrae un corpo di massa $m = 1 \text{ kg}$ (in un luogo dove $g = 9,8066 \text{ m/s}^2$)

$$F = m \cdot a$$

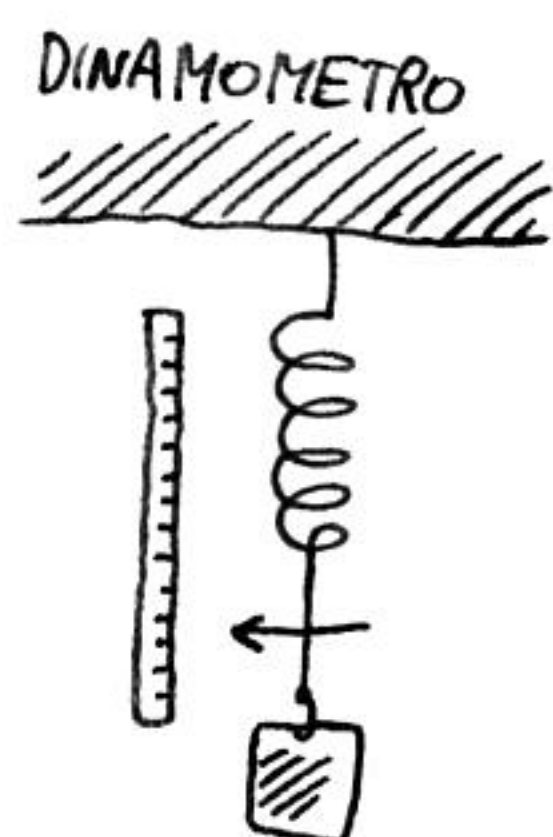
$$P = m \cdot g$$

Peso e massa di un corpo sono tra loro proporzionali (nello stesso luogo).

La massa è una qualità intrinseca di un corpo, il peso dipende dalla sua posizione rispetto al centro della Terra (dipende dal luogo).

Il peso di un corpo è nullo in un luogo dove $g=0$, ma gli effetti inerziali sono sempre gli stessi.

Occorre la stessa forza per spostare un blocco nello spazio (dove $g=0$) e per muoverlo lungo un piano orizzontale, sulla Terra, dove vi sia attrito nullo. Tale forza è $\neq 0$.

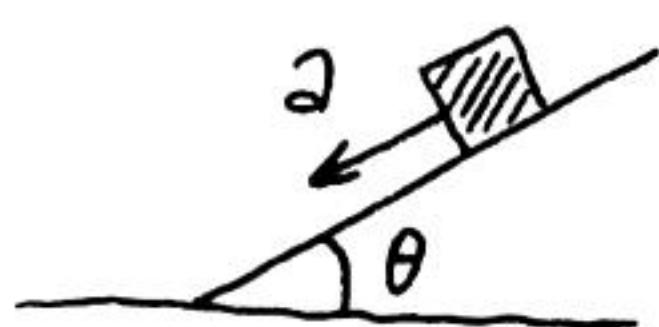


PROCEDIMENTO STATICO PER LA MISURA DELLE FORZE

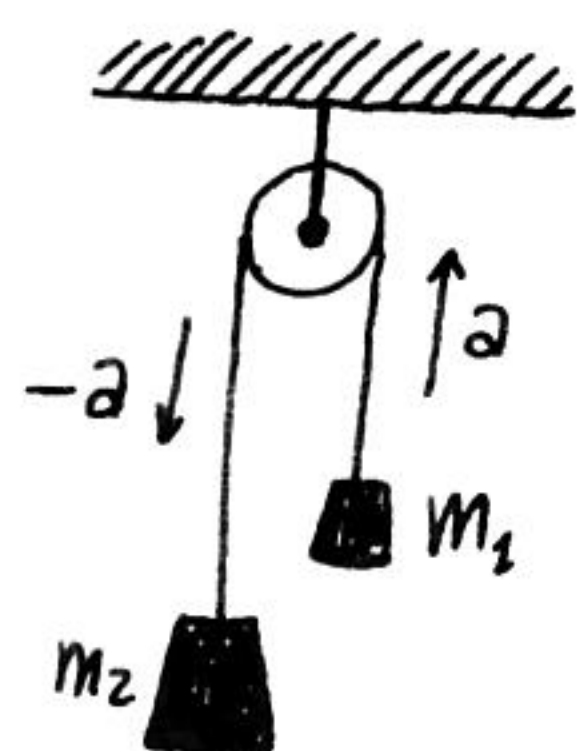
RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA DI MECCANICA CLASSICA:

- 1) Individuare il corpo
- 2) Esaminare l'ambiente circostante
- 3) Scegliere un opportuno sistema di riferimento inerziale
- 4) Disegnare un diagramma di corpo e forze agenti su esso
- 5) Applicare la legge $F = ma$

(accelerazione verso l'alto e' positiva)



$$a = -g \sin \theta$$



$$m_2 > m_1$$

T = tensione fune

m_2 ha accelerazione $-a$, m_1 ha accelerazione a

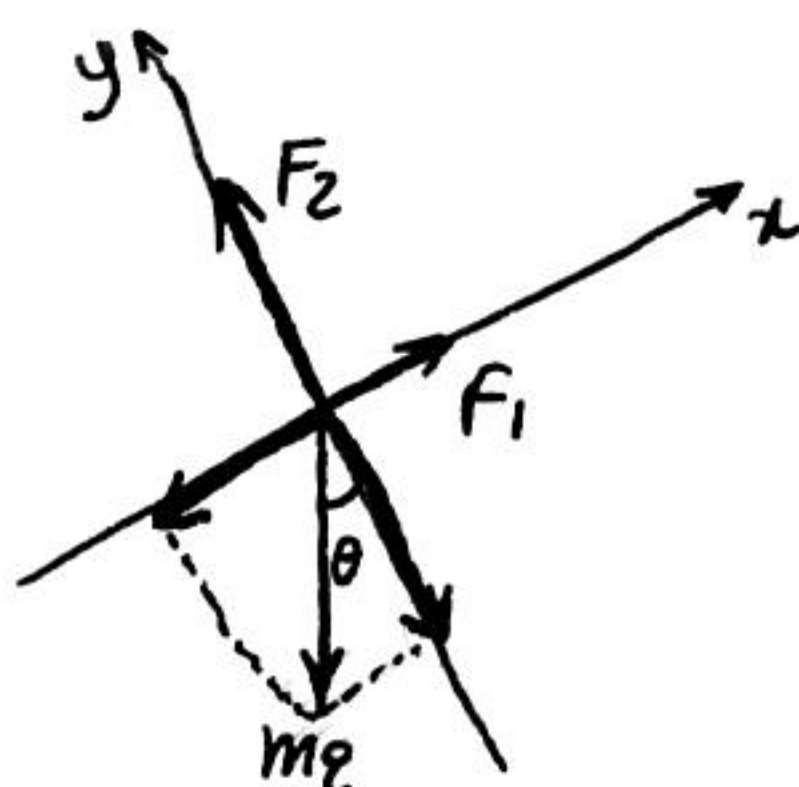
$$\text{Si ha: } \begin{cases} T - m_1 g = m_1 a \\ T - m_2 g = -m_2 a \end{cases}$$

da cui:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_2 + m_1} g$$

la tensione e' una forza



$$F_1 = mg \sin \theta = \text{forza esercitata dalla fune sul blocco}$$

$$F_2 = mg \cos \theta = \text{forza normale agente sul blocco}$$

6 DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE II

ATTRITO:

Un blocco lanciato lungo un piano orizzontale a un certo punto si ferma, perché subisce una accelerazione media $\vec{a}$ di direzione opposta al movimento e dovuta all'attrito piano-blocco. La forza media d'attrito è $m\vec{a}$ (m = massa blocco)

ATTRITO STATICO (tra un piano e un blocco fermo):

la massima forza d'attrito statico è pari alla minima forza necessaria per iniziare il moto - la forza necessaria per mantenere il blocco in movimento è poi minore (occorre uno "strappo" iniziale)

$$\frac{F_s}{N} = \mu_s$$

F_s = valore massimo della forza d'attrito statico
 N = forza normale

μ_s = coefficiente d'attrito statico

ATTRITO DINAMICO (tra un piano e un blocco in movimento):

la forza d'attrito dinamico è ~~proporzionale~~ indipendente dalla velocità relativa delle due superfici a contatto (o indipendente?)

$$\frac{F_D}{N} = \mu_D$$

F_D = forza d'attrito dinamico

N = forza normale

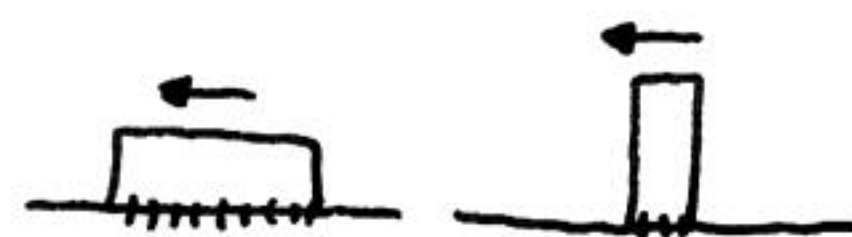
μ_D = coeff. d'attrito dinamico

Generalmente, per una stessa superficie, $\mu_s > \mu_D$

Le leggi sull'attrito sono formule empiriche e approssimate

La forza di attrito:

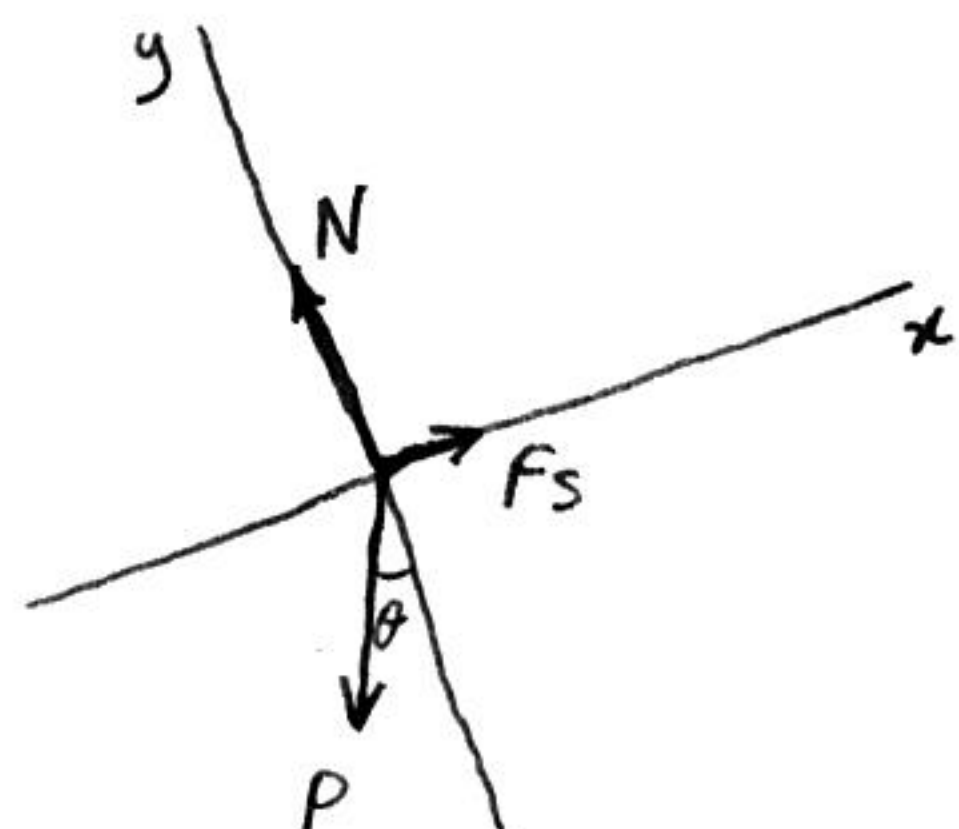
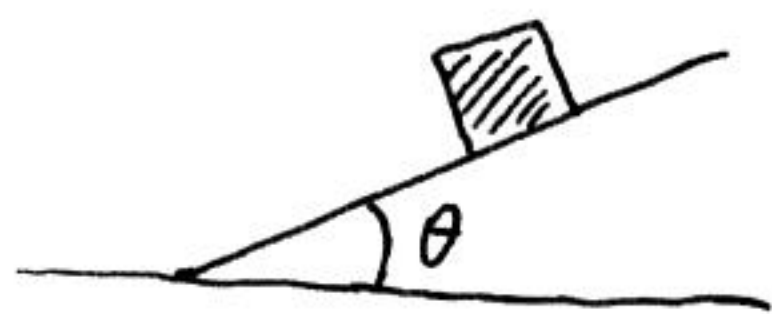
- 1) è indipendente dalla superficie di contatto del corpo
- 2) è proporzionale alla forza normale *



* Forza normale: nasce dalle deformazioni elastiche di due corpi a contatto.

Per un corpo fermo o che scivola lungo un piano, è uguale in modulo al peso del corpo (e opposta in direzione); questo perché il piano deve esercitare sul corpo una forza uguale a quella che il corpo esercita sul piano, ovvero la forza peso.

IL BLOCCO RESTA IMMOBILE SUL PIANO A CAUSA DELL'ATTRITO STATICO. AUMENTANDO L'ANGOLO θ , QUANDO QUESTO RAGGIUNGE IL VALORE θ_0 , IL BLOCCO INIZIA A MUOVERSI. QUANTO VALE μ_s ?



N = forza normale (esercitata dal piano sul blocco)
 f_s = forza di attrito statico (" " ")
 P = forza peso

Quando il blocco è immobile, $\vec{N} + \vec{f}_s + \vec{P} = 0$

$$P \sin \theta = f_s$$

$$P \cos \theta = N$$

Quando il blocco inizia a muoversi (piano inclinato di un angolo θ_0), si ha

$$P \sin \theta_0 = \mu_s N$$

$$P \cos \theta_0 = N$$

Da cui $\boxed{\tan \theta_0 = \mu_s}$, dove θ_0 è l'angolo più piccolo per il quale si abbia scivolamento del blocco.

UN'AUTOMOBILE SI MUOVE LUNGO UNA STRADA ORIZZONTALE CON VELOCITÀ V_0 . IL COEFF. ATTRITO STATICO TRA PNEUMATICI E STRADA È μ_s . QUAL È LA PIÙ BREVE DISTANZA DI FRENATA?

$$V^2 = V_0^2 + 2ax \quad \text{poiché l'automobile si deve fermare completamente, } V = 0$$

$$V_0^2 + 2ax = 0$$

$$x = \frac{-V_0^2}{2a}$$

$$\text{Si ha: } f_s = -ma = -\left(\frac{P}{g}\right)a = \frac{N}{g}a$$

$$\text{Inoltre: } f_s = \mu_s N$$

$$\text{Per cui: } \frac{N}{g}a = \mu_s N \rightarrow \cancel{N} a = \mu_s g$$

$$\boxed{x = \frac{-V_0^2}{2\mu_s g}}$$



In un corpo che muove di moto circolare uniforme, legato con una fune a un chiodo al centro, si ha

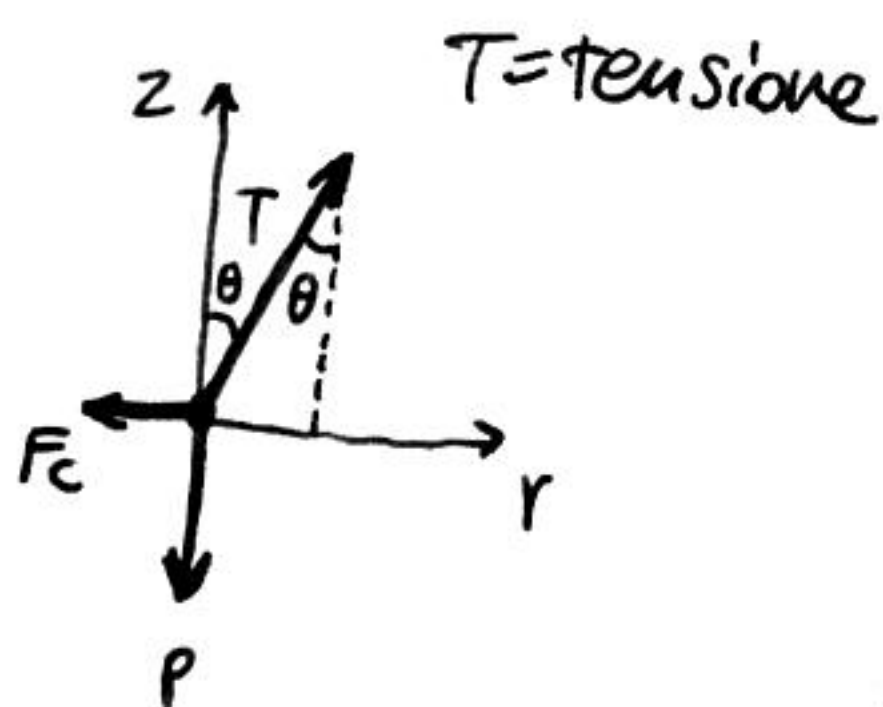
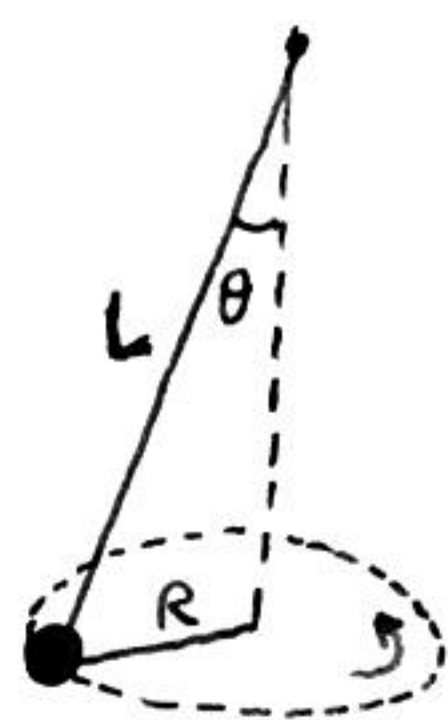
$$F = ma = m \frac{v^2}{r}$$

La forza centripeta F si identifica con la tensione della fune.

Se si taglia la fune, il corpo si allontana di moto rettil. unif. lungo la tangente al cerchio nel punto in cui si trovava il corpo quando è stata tagliata la fune.

PENDOLO CONICO

- TROVARE LA VELOCITÀ DEL CORPO -



Scomponiamo la tensione della fune nelle componenti:

$$T_z = T \cos \theta$$

$$T \cos \theta = P = mg \quad \text{uguaglia la forza peso}$$

$$T_r = T \sin \theta$$

$$T \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \quad \text{uguaglia la forza centripeta}$$

$$R = L \sin \theta$$

Per cui si ha:

$$T \sin \theta = m \frac{v^2}{L \sin \theta}$$

$$T \cos \theta = mg$$

$$\rightarrow \tan \theta = \frac{v^2}{g L \sin \theta} \rightarrow \boxed{v^2 = \tan \theta \cdot g L \sin \theta}$$

$$\rightarrow \boxed{v = \sqrt{\tan \theta \cdot g R}}$$

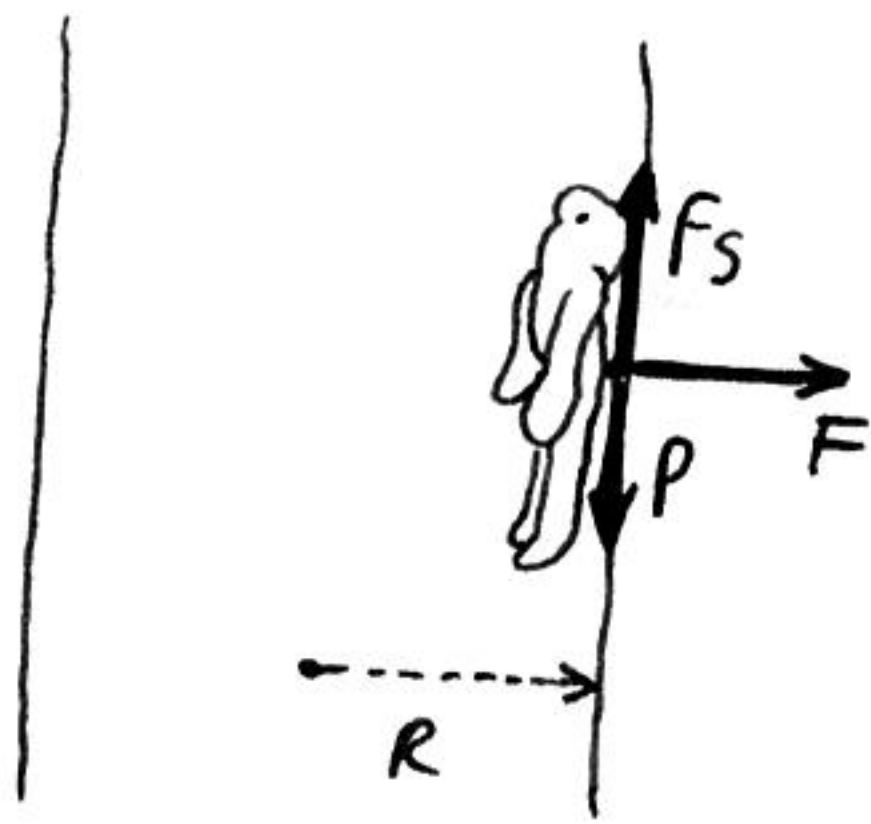
Il periodo τ è:

$$v = \sqrt{\tan \theta \cdot g R} = \frac{2\pi R}{\tau}$$

$$\tau = \frac{2\pi R}{\sqrt{\tan \theta \cdot g R}} = \frac{2\pi \sqrt{L \sin \theta}}{\sqrt{g \cdot \tan \theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \cos \theta}$$

ROTOR

- TROVARE IL COEFF. ATTRITO STATICO NECESSARIO PERCHÉ LA PERSONA NON SCIVOLI LUNGO LA PARETE



Perché la persona non scivoli, deve essere
 $F_s = P$

$$F = m \cdot a = \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{R}$$

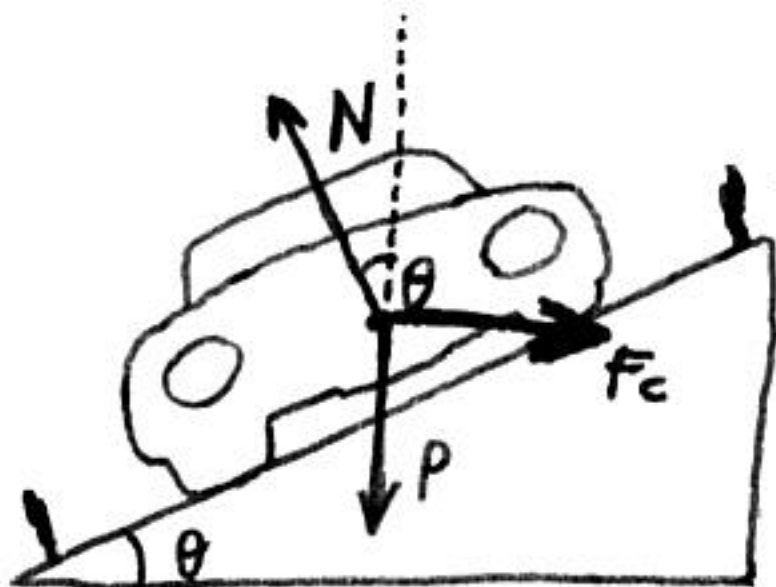
$$F_s = \mu_s F$$

deve essere $F_s = P$

$$\text{da cui } P = \mu_s \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow \mu_s = \frac{R g}{v^2}$$

SOPRAELEVAZIONE DI UNA STRADA

- TROVARE L'ANGOLO DI SOPRAELEVAZIONE

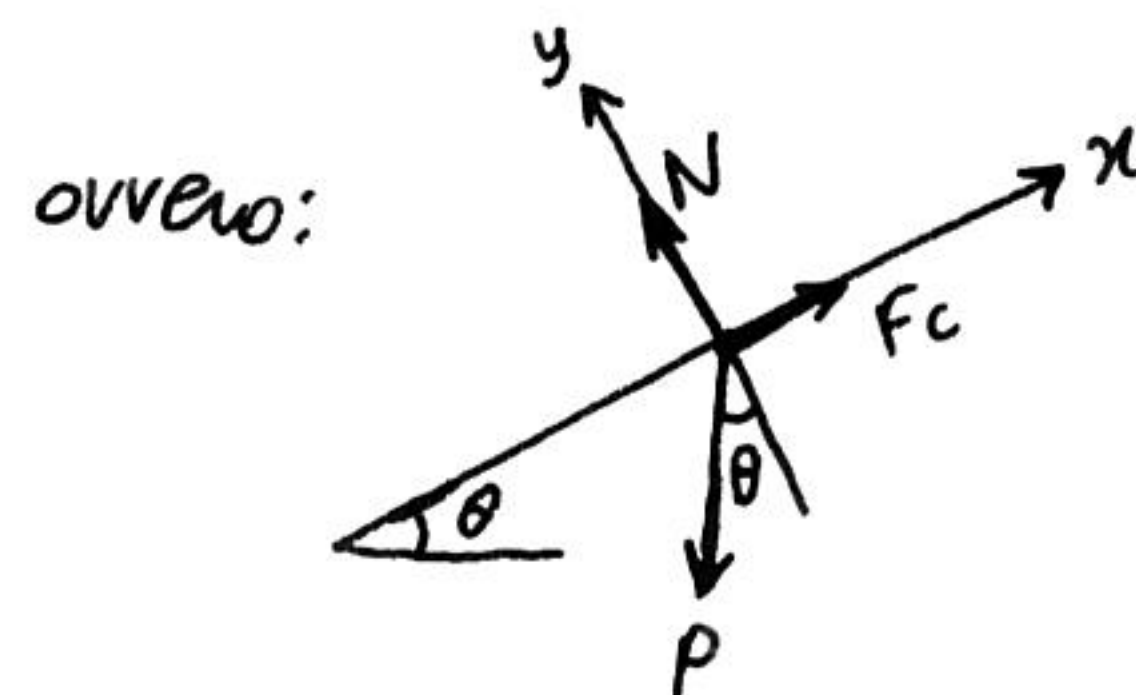


$$N \cos \theta = P \rightarrow N \cos \theta = m g$$

$$N \sin \theta = m \frac{v^2}{R}$$

Combinando queste due equazioni, si ha

$$\frac{N \sin \theta}{N \cos \theta} = \frac{m \frac{v^2}{R}}{m g} \rightarrow \tan \theta = \frac{v^2}{R g}$$



$$P \sin \theta = F_c = m \frac{v^2}{R}$$

$$P \cos \theta = N = m g$$

$$\tan \theta = \frac{v^2}{R g}$$

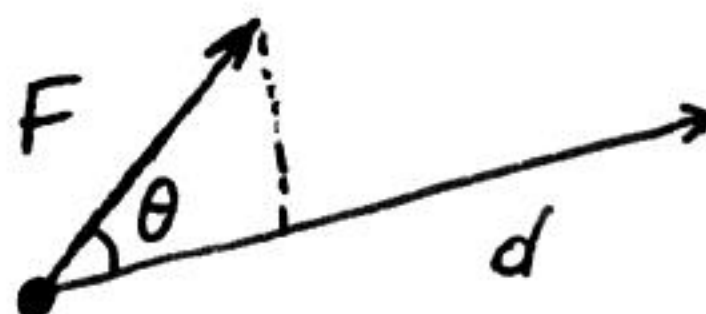
Forze esistenti in natura:

- 1) Forze gravitazionali (deboli)
- 2) Forze elettromagnetiche (medie)
- 3) Forze nucleari (forti)
- 4) Forze di interazione debole

7 LAVORO E ENERGIA

Consideriamo una particella soggetta a una forza.

LAVORO compiuto dalla forza sulla particella = il prodotto della componente della forza lungo la direzione dello spostamento della particella, per la distanza percorsa dalla particella.


$$L = \vec{F} \cdot \vec{d}$$
$$L = F \cos \theta \cdot d$$

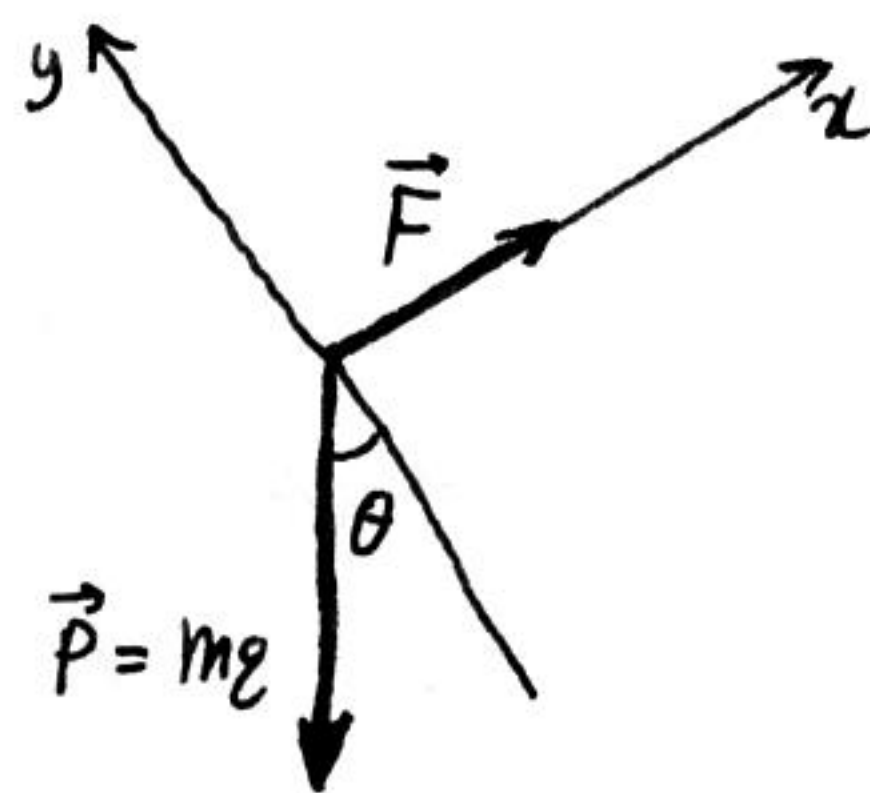
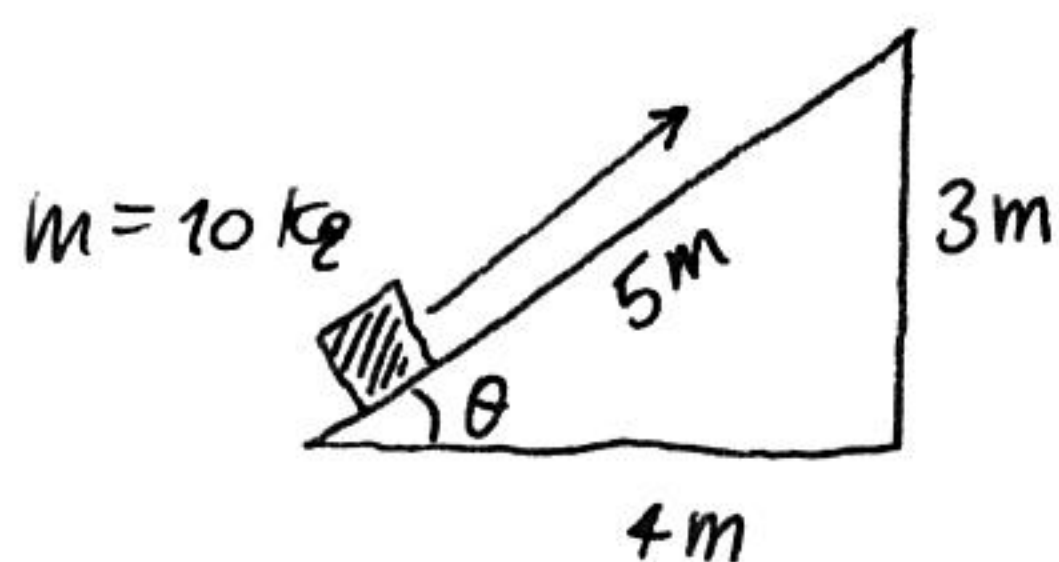
Se $\theta = 90^\circ$, il lavoro è nullo. Se $\theta = 0^\circ$, $L = Fd$.

Il lavoro è uno scalare, dato dal prodotto scalare di due vettori (forza e spostamento).
Il lavoro può essere positivo o negativo.

Unità di lavoro: è il lavoro compiuto dall'unità di forza nel muovere un corpo di una unità di lunghezza lungo la direzione della forza.

Sistema	Nome	Valore
SI	J (Joule)	$N \cdot m$
CGS	erg	$\text{dyn} \cdot \text{cm}$
Ingegneri	kgm (chilogrammetro)	$\text{kgf} \cdot \text{m}$

Che lavoro compie una forza che spinge il blocco a velocità costante su per il piano inclinato?



Dove averrà:

$$F = mg \sin \theta$$

$$L = F \cos 0 \cdot d$$

($mg \sin \theta$ è la componente lungo l'asse x della forza peso $\vec{P}$, componente uguale e contraria alla forza $\vec{F}$ necessaria)

$$L = 10 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot 5 \text{ m} = 294 \text{ J}$$

Se il blocco fosse stato alzato verticalmente fino alla stessa altezza, il lavoro sarebbe stato uguale:

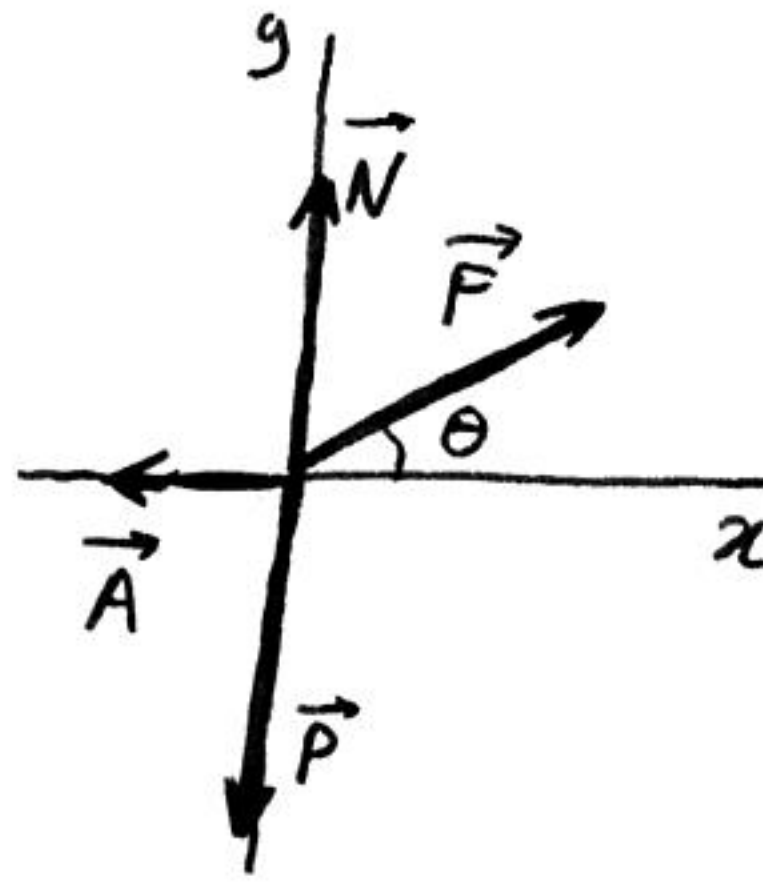
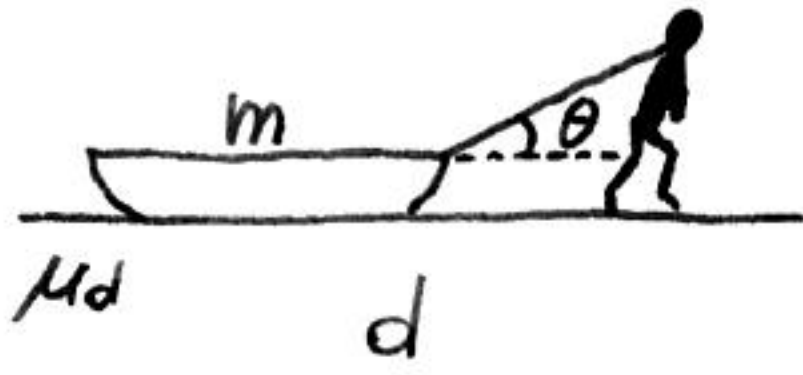
$$F = mg$$

$$L = F \cdot d$$

$$L = 10 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 3 \text{ m} = 294 \text{ J}$$

Il lavoro necessario per alzare il blocco a una certa altezza è sempre lo stesso, indipendentemente dal cammino compiuto. I piani inclinati ci permettono di utilizzare una forza inferiore, ma il blocco andrà spinto per un percorso più lungo.

Un uomo tira una slitta di massa m ~~lungo~~ per una distanza d su una superficie orizzontale a velocità costante, con coeff. d'attrito dinamico μ_d , ~~mentre~~ e la forza forma un angolo θ con l'orizzonte. Qual è il lavoro compiuto?



$\vec{N}$ forza normale
 $\vec{F}$ " dell'uomo
 $\vec{P}$ " peso
 $\vec{A}$ " d'attrito

Deve essere:

$$\begin{cases} F \cos \theta = A \\ F \sin \theta + N = P \\ A = \mu_d N \end{cases}$$

equazione di uguaglianza delle forze lungo l'asse x
 " " " " " " " l'asse y

relazione tra forza d'attrito e coeff. d'attrito dinamico

Risolvendo questo sistema di 3 equazioni in 3 incognite (F , N ed A) si ottiene:

$$F = \frac{\mu_d P}{\cos \theta + \mu_d \sin \theta} = \frac{\mu_d m g}{\cos \theta + \mu_d \sin \theta}$$

Il lavoro compiuto è $L = \frac{\mu_d m g \cdot d \cos \theta}{\cos \theta + \mu_d \sin \theta}$.

LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA VARIABILE IN MODULO (CASO UNIDIMENSIONALE)

Consideriamo il lavoro compiuto da una forza non costante, variabile in modulo e agente ~~diretta~~ lungo l'asse x .

Disegnamo in un grafico la forza F in funzione di x . Dividiamo lo spostamento totale in tanti intervallini di lunghezza Δx .

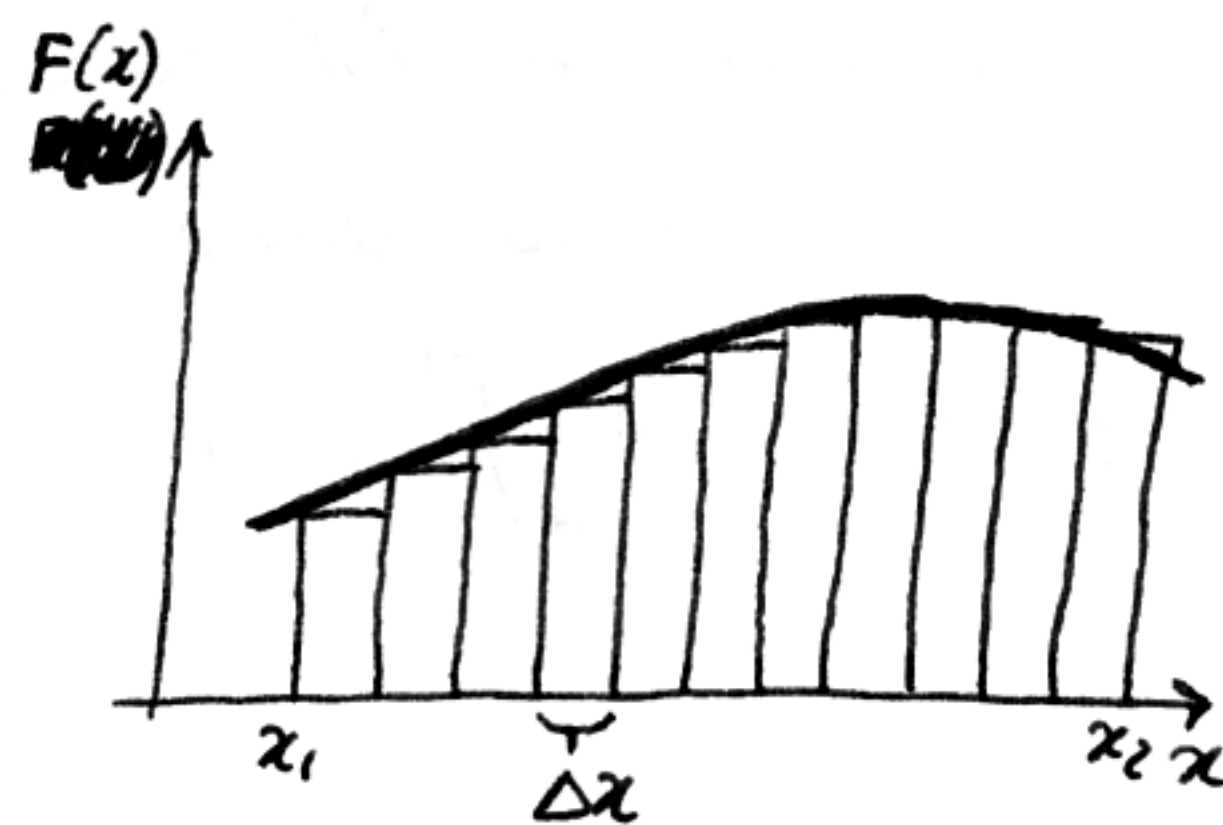
Durante lo spostamento da x_1 a $x_1 + \Delta x$, la forza è ~~costante~~ pressoché costante ed il lavoro compiuto è $\Delta L \approx F \Delta x$, dove F è il valore della forza in x_1 . Il lavoro totale compiuto si ottiene sommando tutti gli intervallini, ovvero

$$L_{12} \approx \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x. \text{ Tale approssimazione}$$

migliora al ~~decrescere~~ ~~diminuire~~ del numero degli intervallini, e perciò al ~~diminuire~~ ~~diminuire~~ della loro lunghezza. Otteniamo un risultato esatto per un numero infinito di intervallini di lunghezza che tende a zero, cioè

$$L_{12} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F dx. \text{ Questo è definito come l'integrale}$$

di F rispetto a x da x_1 a x_2 , e corrisponde all'area della parte di piano compresa tra l'asse x , la curva $F(x)$ e le rette x_1 e x_2 parallele all'asse y .



$F = -kx$ legge di Hooke (legge della forza per le molle)

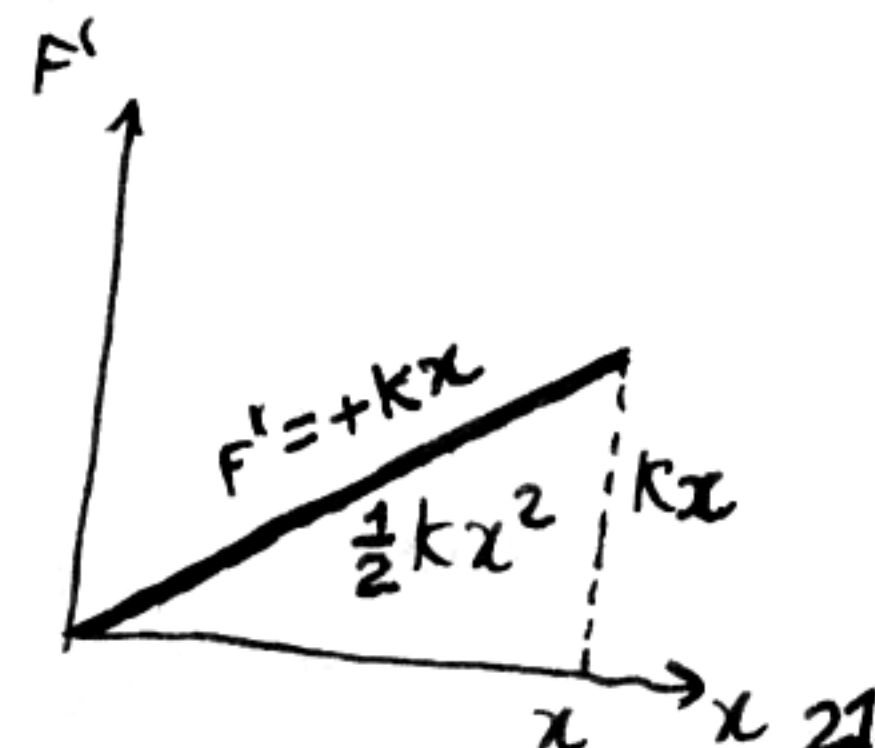
k = costante elastica della molla (definisce la rigidità della molla)

Deformando una molla in modo che il ~~movimento~~ corpo fissato all'estremità si porti in una posizione x , essa eserciterà sul corpo una forza $F = -kx$. Tale forza è sempre diretta in verso opposto allo spostamento (si vede il segno meno) ed è perciò una forza di richiamo.

(in modo da contrapporre alla forza $F = -kx$ che la molla esercita)
Applicando una forza $F' = +kx$ alla molla, ~~tenendola compressa~~ in modo che il suo estremo si sposti da x_1 a x_2 , tale forza compie un lavoro

$$L_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F'(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} +kx dx = \left[\frac{1}{2} kx^2 \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2$$

Per $x_1 = 0$ e $x_2 = x$, $L_{12} = \frac{1}{2} kx^2$, che rappresenta il lavoro compiuto per allungare la molla di un tratto x (o comprimere).



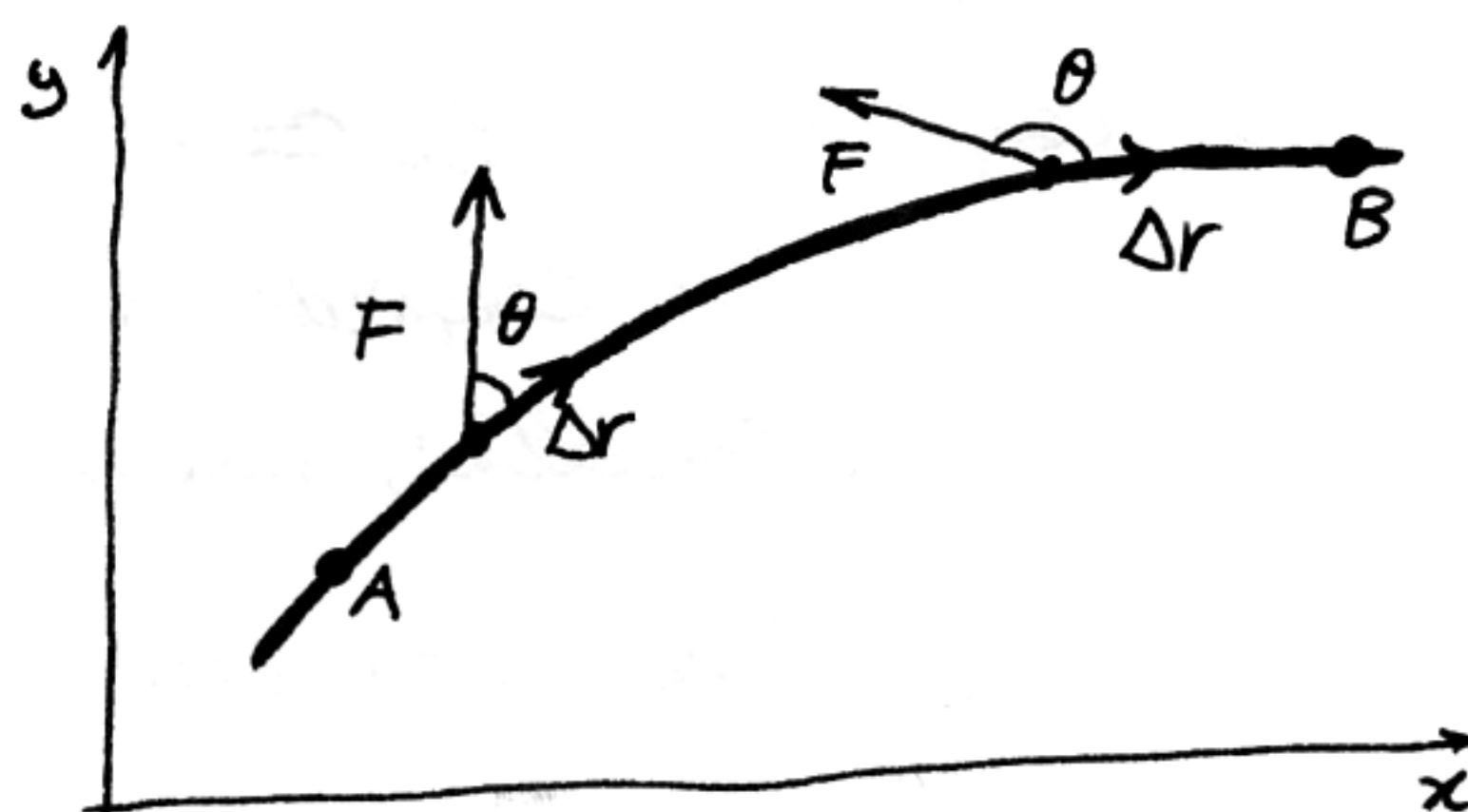
LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA VARIABILE IN MODULO E DIREZIONE (CASO BIDIMENSIONALE)

In questo caso la forza applicata varia nel tempo in modulo e in direzione.
Per calcolare il lavoro totale suddividiamo la traiettoria in tanti piccoli spostamenti Δr ; il lavoro compiuto in ognuno di questi spostamenti sarà

$$\Delta L = \vec{F} \cdot \Delta r = F \cos \theta \cdot \Delta r$$

Quando tali spostamenti Δr diventano infinitesimi, il lavoro totale è dato

$$\text{dall'integrale } L = \int_a^b \vec{F} \cdot dr = \int_a^b F \cos \theta \cdot dr$$



Definiamo l'ENERGIA CINETICA DI UN CORPO

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$



Consideriamo una forza costante agente su una particella. Il lavoro da essa compiuto è $L = F \cdot x = m a \cdot x$ per uno spostamento x .

Essendo $a = \frac{v - v_0}{t}$ $x = \frac{v + v_0}{2} t$ (dove v_0 è la velocità della particella all'istante 0 e v la velocità all'istante t)

$$\text{Si ha } L = m \frac{v - v_0}{t} \cdot \frac{v + v_0}{2} t = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Ovvero, il lavoro compiuto da una forza (dalla risultante delle forze) su una particella è uguale alla variazione di energia cinetica della particella (TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA). $L = \Delta K$ Ciò è ricavato dalla II^a legge di Newton.

Tale teorema vale anche se la forza è variabile in modulo. Infatti il lavoro compiuto è $L = \int_{x_0}^x F dx$ (prevediamo lo spostamento in direzione della forza).

$$\text{Essendo } a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

$$\text{Si ha } L = \int_{x_0}^x F dx = \int_{x_0}^x m a dx = \int_{v_0}^v m \frac{dv}{dx} v dx = \int_{v_0}^v m v dv = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

NOTA: Il lavoro compiuto dalla risultante delle forze agenti è pari alla somma dei lavori compiuti dalle singole forze, perciò $L_1 + L_2 + \dots = \Delta K$

A che velocità tocca terra un corpo lasciato cadere da un'altezza h ?

$$L = \Delta K$$

$$L = \vec{F} \cdot \vec{d} = mg \cdot h$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

perciò $mg h = \frac{1}{2} m v^2$, da cui $v = \sqrt{2gh}$.



POTENZA: La potenza è la rapidità con la quale un lavoro è fatto.
È pari al lavoro totale compiuto dal sistema, diviso il tempo impiegato a compierlo.

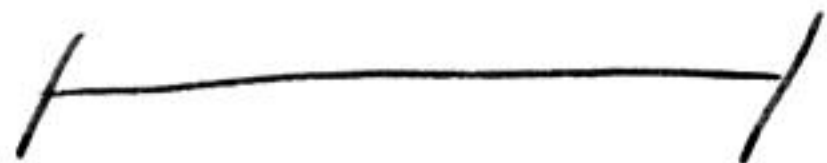
Potenza media: $\bar{P} = \frac{L}{t}$

Potenza istantanea: $p = \frac{dL}{dt}$

Sistema	Unità	Valore
SI	W (watt)	1 J/s
Ingegneria	kgm/s	

viene usato anche il Cavallo Vapore (hp) $1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$

kWh (kilowattora): lavoro compiuto in un'ora da una macchina che lavori alla potenza costante di 1 kW (kilowatt).
È una unità di lavoro!



Una automobile sviluppa una potenza P e viaggia a una velocità V . Qual è la forza di propulsione dell'auto?

$$P = \frac{L}{t} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{t} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

$$P = F \cdot V \quad F = \frac{P}{V}$$

Da quale altezza dovrebbe cadere un'automobile per acquistare una energia cinetica eguale a quella che avrebbe se viaggiasse alla velocità di 100 km/h?

$$K_1 = \frac{1}{2} m v^2$$

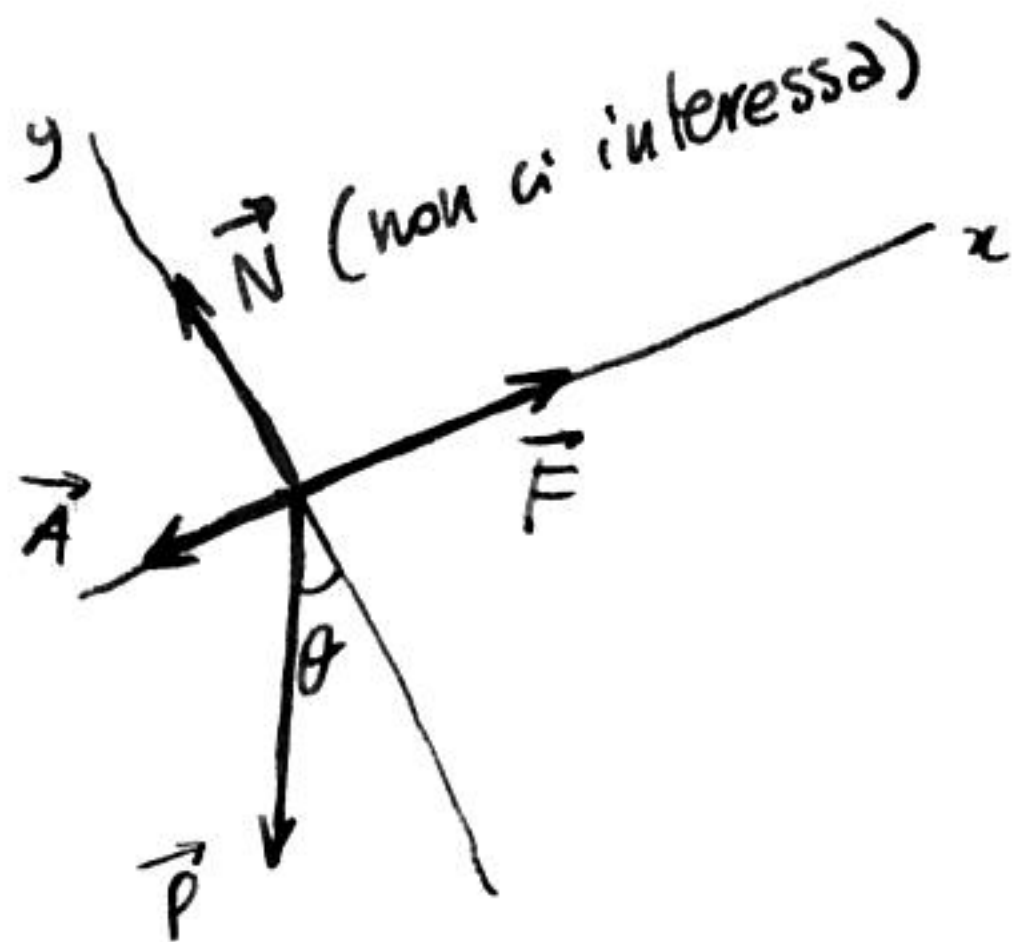
$$v = \sqrt{2gh} \quad K_2 = \frac{1}{2} m 2gh = mgh$$

$$K_1 = K_2 \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = mgh \rightarrow h = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g}$$

$$100 \text{ km/h} = 27,8 \text{ m/s}$$

$$h = 39,4 \text{ m}$$

Un camion riesce a muoversi con una velocità di 30 km/h su una strada in salita che ha un dislivello di 1 m ogni 50 metri. La forza di attrito è uguale a 1/25 del peso del camion. Con che velocità si muoverebbe il camion se impiegasse la stessa potenza in discesa?



$$\sin \theta = \frac{1}{50}$$

$$v = 30 \text{ km/h} = 8,3 \text{ m/s}$$

$$F = A + P \sin \theta$$

forza del camion

$$W = \frac{F \cdot d}{t} = F \cdot v$$

potenza del camion

$$W = \left(\frac{1}{25} P + P \sin \theta \right) v = P \cdot v \cdot \left(\frac{1}{25} + \sin \theta \right) = P \cdot 0,438$$

Se si muovesse in discesa, avremmo:

$$F + P \sin \theta = A$$

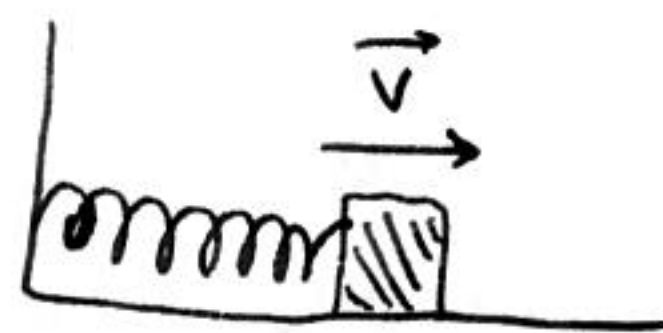
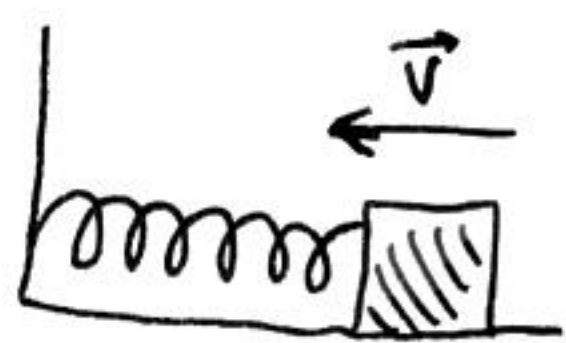
$$F = A - P \sin \theta$$

$$W = F \cdot v$$

$$v = \frac{W}{F} = \frac{W}{A - P \sin \theta} = \frac{W}{\frac{1}{25} P - P \sin \theta} = \frac{W}{P \left(\frac{1}{25} - \sin \theta \right)} =$$

$$= \frac{P \cdot 0,438}{P \cdot \frac{1}{50}} = \frac{0,438}{0,02} = 21,9 \text{ m/s} = 30 \text{ km/h}$$

8 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA



Quando il blocco ritorna nella posizione iniziale, ha la stessa velocità (diretta in verso contrario) che all'inizio, e quindi stessa energia cinetica.

La sua capacità di compiere lavoro si è conservata. La forza elastica di una molla è perciò una forza conservativa, come la forza di gravità.

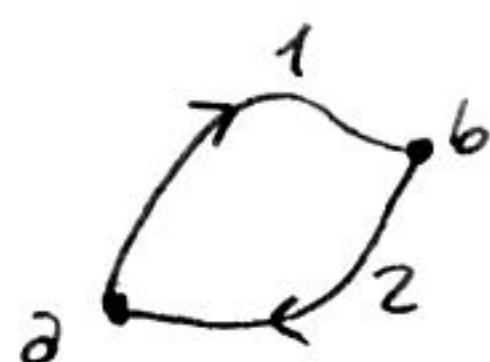
Se vi fosse attrito tra il blocco e il piano, essendo l'attrito diretto sempre in senso opposto al movimento, il blocco finirebbe nella posizione iniziale con velocità minore: la forza d'attrito è una forza non conservativa. Se almeno una delle forze non è conservativa, l'energia cinetica non si conserva.

Una forza è conservativa se, agendo su un corpo, facendogli compiere un percorso chiuso, la sua energia cinetica resta inalterata.

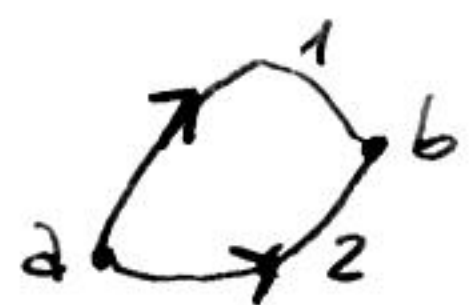
Poiché si ha: $\Delta K = 0 \iff L = 0$, allora:

Una forza è conservativa se il lavoro da essa compiuto su un corpo che si muova lungo un percorso chiuso è nullo.

Si ha anche:



$$L_{ab1} + L_{ba2} = 0 \rightarrow L_{ab1} = -L_{ba2}$$



$$L_{ab2} = -L_{ba2}$$

$$\rightarrow L_{ab1} = L_{ab2}$$

ovvero, il lavoro compiuto è indipendente dal percorso fatto. Quindi:

Una forza è conservativa se il lavoro da essa compiuto nello spostare un corpo da a a b dipende solo dalla posizione dei due punti, e non dal cammino percorso.

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$U = \text{ENERGIA POTENZIALE}$

$$K + U = \text{costante}$$

L'energia potenziale costituisce una sorta di energia immagazzinata che può essere recuperata e trasformata in energia cinetica in qualunque momento.

$$\Delta U = -\Delta K = -L = -\int_{x_0}^x F(x) dx \quad (1) \quad \text{(il punto materiale si sposta da } x_0 \text{ a } x)$$

Come si vede, possiamo calcolare ΔU solo se la forza dipende ^{solo} dalla posizione del punto materiale, cioè solo se la forza è conservativa.

$$K + U = E$$

$E = \text{ENERGIA MECCANICA TOTALE}$

costante durante il moto

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \quad (2)$$

Dalla (1) si ha $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (3)$ l'energia potenziale è una funzione della posizione, la cui derivata cambiata di segno ci dà la forza

Possiamo calcolare solo variazioni ΔU di energia potenziale; ~~non~~ assegniamo all'energia potenziale un valore nullo, di solito, quando il corpo è nella posizione di riferimento ($U(x_0) = 0$); tale posizione di riferimento è quella dove la forza agente sul corpo è nulla, di solito. Ciò che importa è la variazione di energia potenziale; assegneremo un'energia potenziale nulla alla posizione che più ci è conveniente.

Cambiando le coordinate, il valore di $U(x)$ cambia di una costante additiva: ma ciò non cambia nulla, perché in (3) la derivata di una costante è zero, e in (2) ~~assegnando~~ la stessa quantità ad entrambi i membri l'equazione non cambia. Anche l'energia cinetica cambia, ~~perché~~ cambiando le coordinate, perché la velocità dipende dal sistema di riferimento.

Ma, quando le forze sono conservative, E non cambia durante il movimento, per qualunque osservatore, in qualsiasi sistema di riferimento.

Sistemi conservativi unidimensionali.

1) Forza di gravità - Energia potenziale di un corpo all'altezza y dalla superficie.

$$\text{Forza } F(y) = -mg$$

$$U(y) = -\int_0^y F(y) dy = -\int_0^y -mg dy = mgy (+ U(0), \text{ in tutti i membri})$$

Ponendo l'energia potenziale nulla alla superficie, cioè $U(0) = 0$, si ha:

$$U(y) = mgy$$

Per un corpo che si sposta dall'altezza y_1 all'altezza y_2 (o viceversa), si ha:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + mgy_2$$

2) Forza elastica di una molla - Energia potenziale di un blocco attaccato a una molla ideale.

$$F(x) = -kx$$

$$U(x) = -\int_0^x F(x) dx = -\int_0^x -kx dx = \frac{1}{2} kx^2$$

Si ha sempre, in qualunque posizione:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

Per $x=0$, l'energia è solo cinetica; per $x=x_m$ (max estensione della molla), l'energia è tutta potenziale.

In x_m , si ha:

$$\frac{1}{2} k x_m^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

dove v_0 = velocità del blocco in $x=0$; questa è la velocità massima

$$\text{ovvero } x_m = \sqrt{\frac{m v_0^2}{k}}$$

L'energia cinetica di un corpo è il lavoro che esso può compiere in virtù della sua velocità. L'energia potenziale di un sistema è il lavoro che esso può compiere in virtù della posizione relativa dei suoi componenti. Non esiste una formula generale per l'energia potenziale. L'energia potenziale di un sistema è ~~determinata~~ tanto maggiore quanto più sono distanti i suoi componenti. Tale energia non appartiene a un determinato corpo, ma è una proprietà generale del sistema.

LA SOLUZIONE COMPLETA DEL PROBLEMA PER FORZE UNIDIMENSIONALI DIPENDENTI SOLO DALLA POSIZIONE, DETERMINATA IN FUNZIONE DEL TEMPO.

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E$$

$$v = \sqrt{\frac{2[E - U(x)]}{m}} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2[E - U(x)]}{m}}} = dt$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2[E - U(x)]}{m}}} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

Nota: da ciò si vede che deve essere $E \geq U(x)$

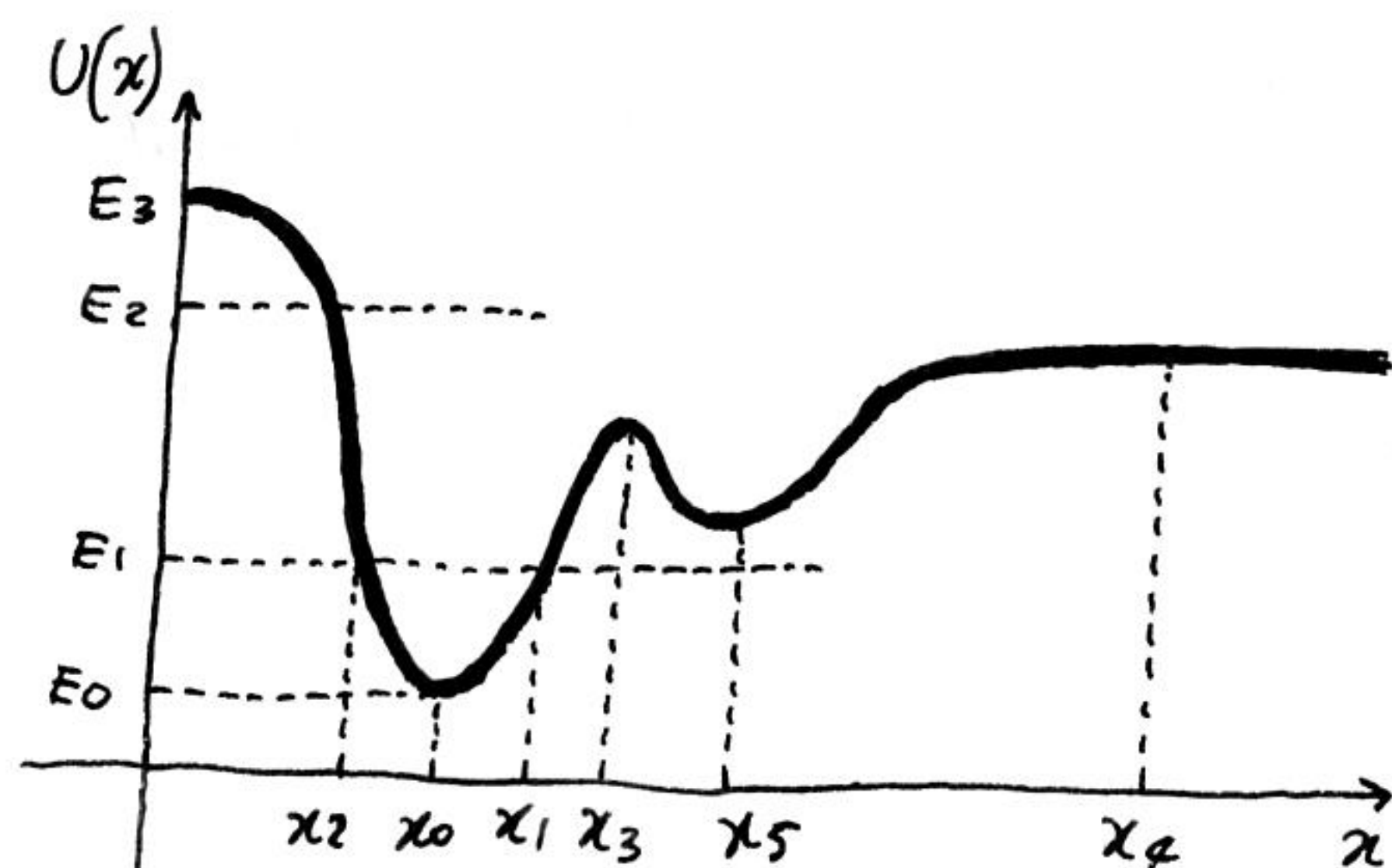


DIAGRAMMA DELL'ENERGIA POTENZIALE

Poiché deve essere $E \geq U(x)$, la minima energia totale possibile è E_0 , dove $E_0 = U$, e in questo punto la particella è in quiete e l'energia cinetica è nulla. A energia più alta, la particella si muove verso x_2 o x_1 ; in questi punti inverte il moto (PUNTI DI INVERSIONE DEL MOTO) e torna in x_0 .

In x_0 la pendenza della curva è nulla, perciò la forza è nulla: $F(x_0) = \left(-\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_0} = 0$. Se una forza applicata alla particella la fa spostare di poco, questa ritorna poi in x_0 (PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE), oscillando attorno alla posizione di equilibrio.

Anche in x_3 si ha $F(x_3) = \left(-\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_3} = 0$.

Spostando di poco la particella, questa precipita in x_5 o x_0 ; x_3 è un punto di EQUILIBRIO INSTABILE.

Anche in x_4 si ha $F(x_4) = \left(-\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_4} = 0$.

In quella zona il tracciato è orizzontale; spostando la particella, questa rimane dove la abbiamo spostata (PUNTO DI EQUILIBRIO INDIFFERENTE).

SISTEMI CONSERVATIVI UNIDIMENSIONALI

$$\Delta U = - \int_{x_0}^x F dx$$

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx}$$

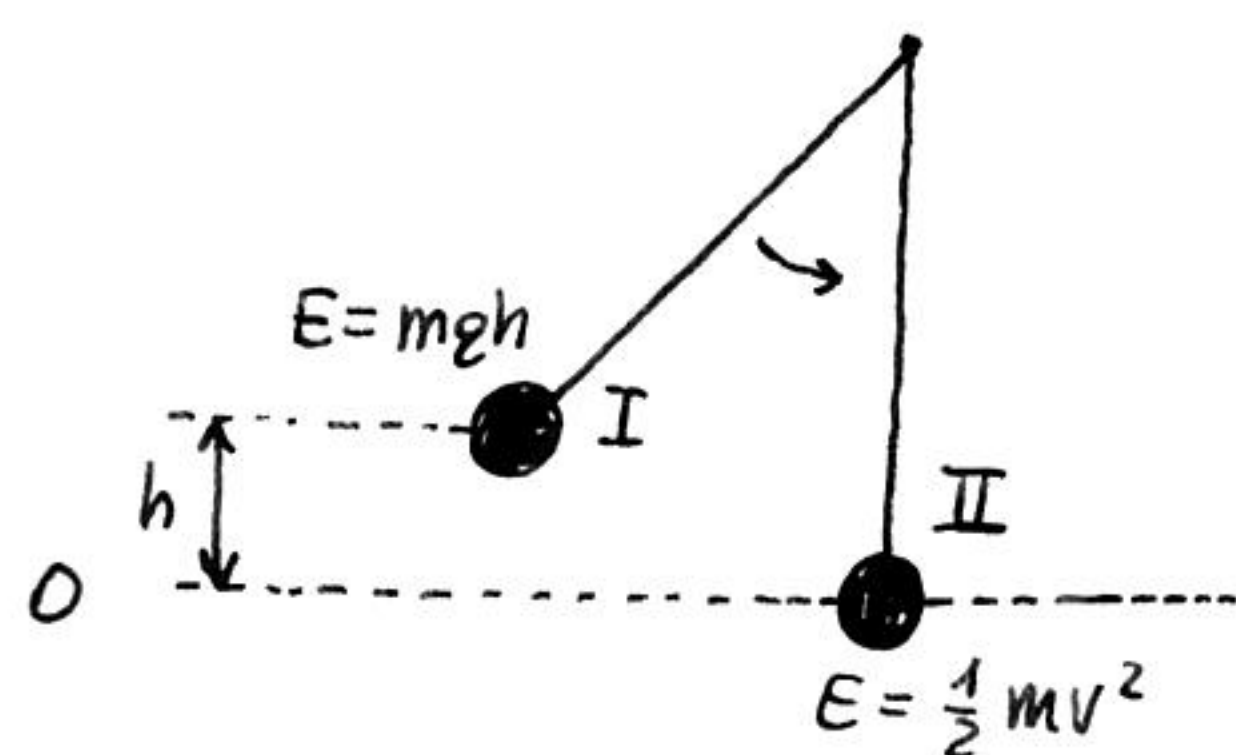
ESTENSIONE AL CASO TRIDIMENSIONALE

$$\Delta U = - \int_{x_0}^x F_x dx - \int_{y_0}^y F_y dy - \int_{z_0}^z F_z dz = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -i \frac{\partial U}{\partial x} - j \frac{\partial U}{\partial y} - k \frac{\partial U}{\partial z}$$

PENDOLO SEMPLICE

(Nota: la tensione del filo è sempre perpendicolare alla direzione di moto, per cui tale forza non compie lavoro)



~~potenziale~~ ~~cinetica~~

nel punto I $0 + mgh = E$

nel punto II $\frac{1}{2}mv^2 + 0 = E$

da cui $mgh = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh}$

In I l'energia è tutta potenziale. In II l'energia è tutta cinetica. Nelle posizioni intermedie l'energia è in parte cinetica e in parte potenziale. Poiché deve essere $U(x) \leq E$, il pendolo non può salire più in alto della sua posizione iniziale h .

FORZE NON CONSERVATIVE

$$L = -\Delta U$$

$$\Delta K + \Delta U = 0 = \Delta E \quad \text{in caso di forze conservative}$$

$$\Delta K + \sum \Delta U = 0 = \Delta E$$

$$L_a + \sum L = -\sum \Delta U \quad \text{in caso di forze non conservative}$$

$$L_a = \Delta E$$

L_a = lavoro compiuto dall'attrito

$$U_{int} = -\Delta E$$

L'energia meccanica perduta per gli attriti si trasforma in energia interna U_{int} (eventualmente termica); il lavoro fatto dalla forza d'attrito è poi all'aumento di tale energia interna

Un oggetto con velocità iniziale ~~14~~ 14 m/s cade da un'altezza di 240 m e si approfonda nella sabbia per 0,20 m. Se la massa del corpo è 1 kg, trovare la forza resistente esercitata dalla sabbia sul corpo.

Energia del corpo quando entra nella sabbia:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + m g h$$

m = massa oggetto

v = velocità iniziale oggetto

h = altezza

Energia di sprofondamento:

$$E = F s$$

F = forza della sabbia (ricognita)

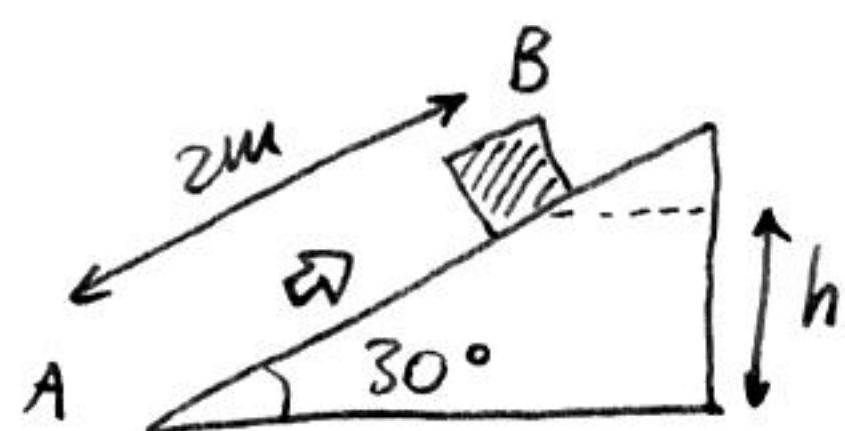
s = profondità di sprofondamento

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g h = F s$$

$$F = \frac{m v^2}{2s} + \frac{m g h}{s} = 12250 \text{ Newton}$$

Un blocco di 10 kg è lanciato lungo un piano, inclinato di 30° , con velocità di 5 m/s. Percorre 2 metri, si ferma e poi ritorna alla base.

Quanto vale l'attrito agente sul blocco?



~~energia in A (base):~~

~~Energia in B (sommità):~~

~~Lavoro compiuto dall'attrito:~~

Energia in A (base): $E_A = K_A + U_A = \frac{1}{2} m v^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5^2 = 125 \text{ J}$

Energia in B (sommità): $E_B = K_B + U_B = 0 + m g h = 10 \cdot 9,8 \cdot 2 \sin 30^\circ = 98 \text{ J}$

Lavoro compiuto dall'attrito: $L_a = E_A - E_B = 27 \text{ J}$

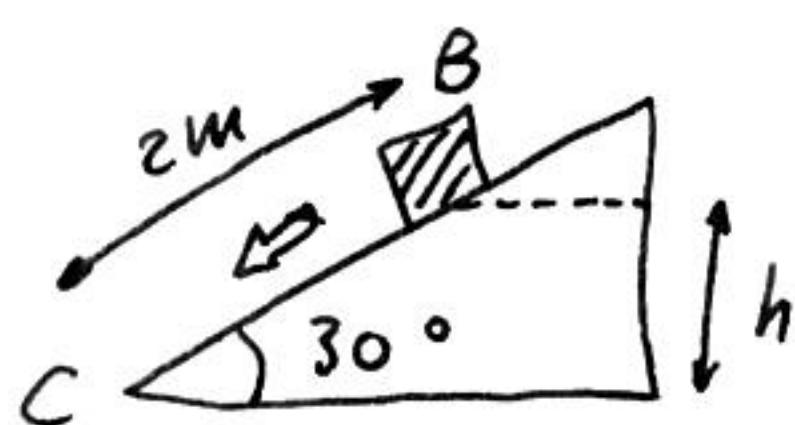
Lavoro attrito = forza attrito $\cdot$ distanza

$$L_a = F_a \cdot d = F_a \cdot 2 \text{ metri}$$

$$F_a \cdot 2 = 27 \text{ J} \rightarrow \boxed{F_a = 13,5 \text{ N}}$$

Continua dal problema precedente.

A che velocità il blocco ritorna alla base?



Energia in B (sommità): $E_B = K_B + U_B = 0 + mgh = 98 \text{ J}$ come già calcolato

Energia in C (base): $E_C = K_C + U_C = \frac{1}{2}mv^2 + 0 = 5 \cdot v^2$

$$E_B = E_C \rightarrow 98 \text{ J} - 27 \text{ J} = 5 \cdot v^2 \rightarrow \boxed{v = 3,75 \text{ m/s}}$$

Sperimentalmente, si è visto che:

$$\Delta K + \sum \Delta U + U_{\text{int}} + \text{variazioni di altre forme di energia} = 0$$

(U_{int} è la variazione di energia interna dovuta all'attrito)

Ovvero, "l'energia totale è costante. L'energia non può venire né creata né distrutta, ma viene trasformata da una forma a un'altra" (PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA)

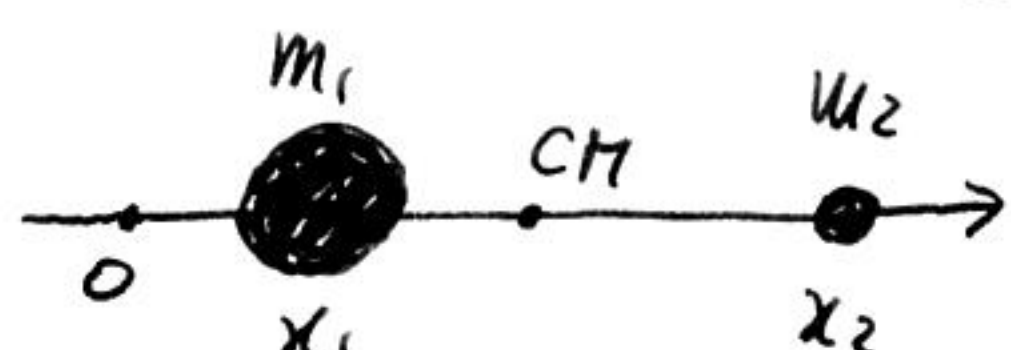
L'energia cinetica e l'energia potenziale si conservano solo quando agiscono forze unicamente conservative; l'energia totale si conserva SEMPRE, in ogni caso, qualunque tipo di forze agiscano.

9 CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO

CENTRO DI MASSA (CM) di un corpo: e' quel punto del corpo che si muove ~~allo~~ allo stesso modo di un singolo punto materiale soggetto alle stesse forze e avente la stessa massa del corpo.

Ad esempio, un oggetto lanciato in aria puo' ruotare su se stesso in vari modi, ma la traiettoria del suo CM e' sempre una semplice parabola.

CM DI UN SISTEMA DI 2 PARTICELLE:



$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Le coordinate del CM possono essere considerate come la "media pesata" delle coordinate delle particelle, dove il "peso" e' la massa delle singole particelle

$$\begin{cases} x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \\ y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \\ z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{M} \end{cases}$$

COORDINATE DEL CM
DI UN QUALSIASI NUMERO
DI PARTICELLE, IN TRE
DIMENSIONI

(CASO PIU' GENERALE)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

Nel caso di un corpo continuo, che e' una distribuzione continua di massa, si puo' suddividere tale corpo in tante piccole parti di massa Δm_i e posizione approssimativa x_i, y_i, z_i . Al tendere all'infinito del numero di tali parti, e al tendere a zero delle loro masse Δm_i , e' possibile calcolare la posizione del CM in modo esatto:

$$\begin{cases} x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x dm}{M} \\ y_{CM} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int y dm}{M} \\ z_{CM} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{\int z dm}{M} \end{cases}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$

$\sum m_i \vec{r}_i$ e $\int \vec{r} dm$
sono chiamati
momenti di massa del
1° ordine
del sistema



SIGNIFICATO FISICO DEL CENTRO DI MASSA

Abbiamo visto che $\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{M}$

da cui $M \vec{r}_{cm} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n$

Derivando rispetto al tempo, si ha $M \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dots + m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt}$

ovvero $M \vec{v}_{cm} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n$

Derivando nuovamente rispetto al tempo, si ha $M \vec{a}_{cm} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_n \vec{a}_n$

ovvero, per la 2ª legge di Newton, $M \vec{a}_{cm} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$

ossia $M \vec{a}_{cm} = \vec{F}_{est}$: il prodotto della massa totale delle particelle per la accelerazione risultante del centro di massa è pari alla somma vettoriale di tutte le forze esterne agenti sulle particelle.

Contano solo le forze esterne, perché le forze interne fra le particelle saranno a due a due uguali e contrarie, per la 3ª legge di Newton, e quindi si annullano tutte fra loro.

Perciò, il CM di un sistema di particelle si comporta come se tutta la massa del sistema fosse concentrata in quel punto, e tutte le forze agenti sul sistema fossero applicate in quel punto.

QUANTITA' DI MOTO di una particella: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ (QM)

II^a LEGGE DI NEWTON (ESPRESSA MEDIANTE LA QM)

"la variazione di quantità di moto riferita all'unità di tempo è proporzionale alla forza risultante ed è diretta parallelamente a tale forza"

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\text{Infatti, } \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}.$$

~~Infatti~~ $\vec{F} = m\vec{a}$ ~~è~~ la 2^a legge di Newton espressa nell'altro modo; questi due modi di esprimere la 2^a legge di Newton sono del tutto equivalenti.

QUANTITA' DI MOTO di un sistema di particelle: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n$
(e' dato dalla somma vettoriale delle QM delle singole particelle)

$$\vec{F}_{\text{est}} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (\text{estensione dell'equazione } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ a un sistema con più particelle})$$

$$\text{Infatti, } \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n = M\vec{v}_{\text{cm}}$$

e così $\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(M\vec{v}_{\text{cm}})}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = M\vec{a}_{\text{cm}} = \vec{F}_{\text{est}}.$

$$\text{Se } \vec{F}_{\text{est}} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{P} = \text{costante}$$

"Quando la risultante delle forze esterne agenti su un sistema è nulla, allora il vettore quantità di moto del sistema rimane costante" (PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QM)

(la QM totale del sistema rimane costante, ma possono variare le QM delle singole particelle)

Avviciniamo i due blocchi e poi lasciamoli liberi; la molla compressa si espande. Come è il moto del sistema?



Sul sistema non agiscono forze esterne, perciò la ^{totale} QM rimane costante.

$$QM_{iniziale} = QM_{finale}$$

$$m_a v_a + m_b v_b = 0 \quad (\text{quando la molla ha finito di espandersi, i blocchi sono fermi})$$

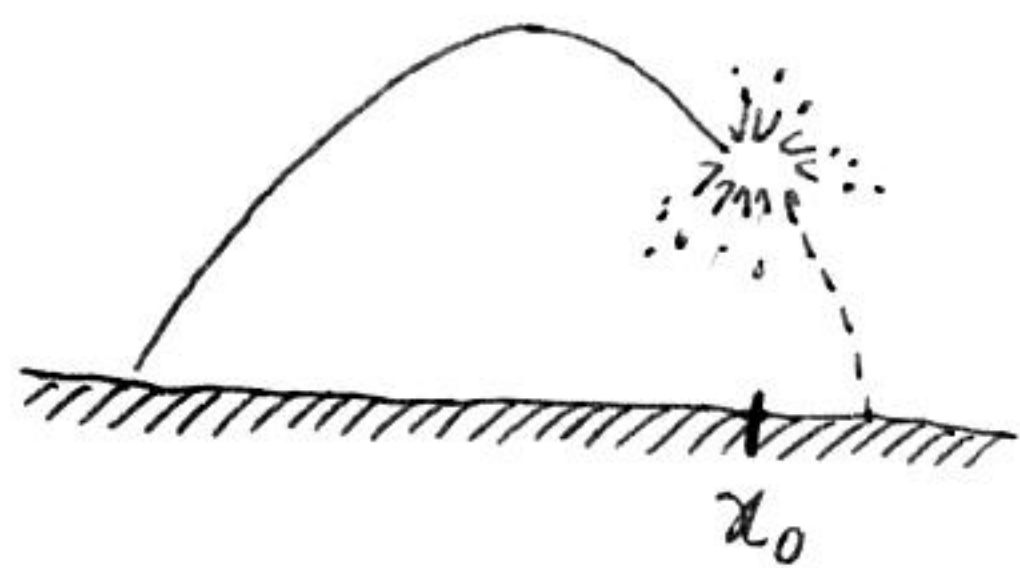
~~$$m_a v_a + m_b v_b = 0$$~~

$$v_a = -v_b \frac{m_b}{m_a}$$

Calcolo delle energie cinetiche: $K_A = \frac{1}{2} m_a v_a^2 = \frac{1}{2} \frac{v_b^2 m_b^2}{m_a}$ $K_B = \frac{1}{2} m_b v_b^2$

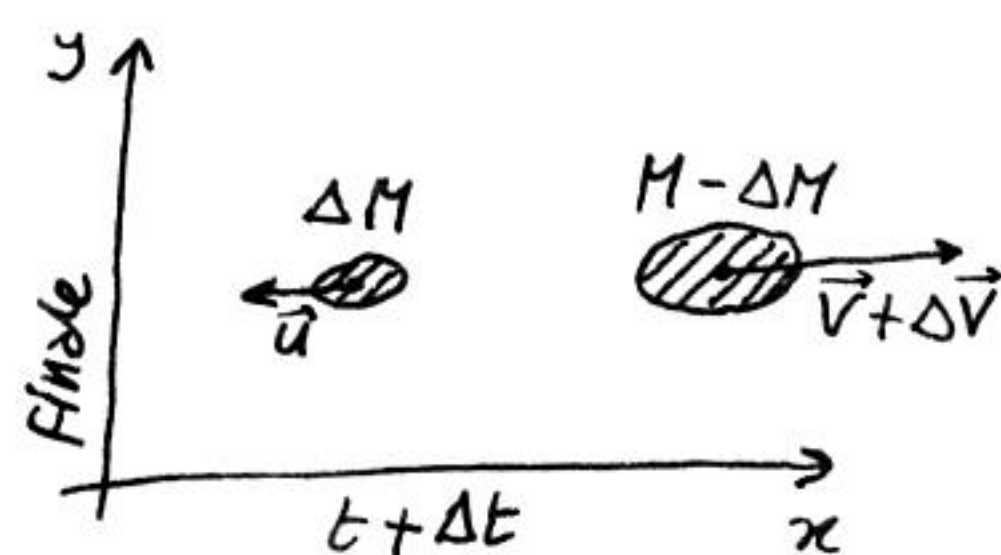
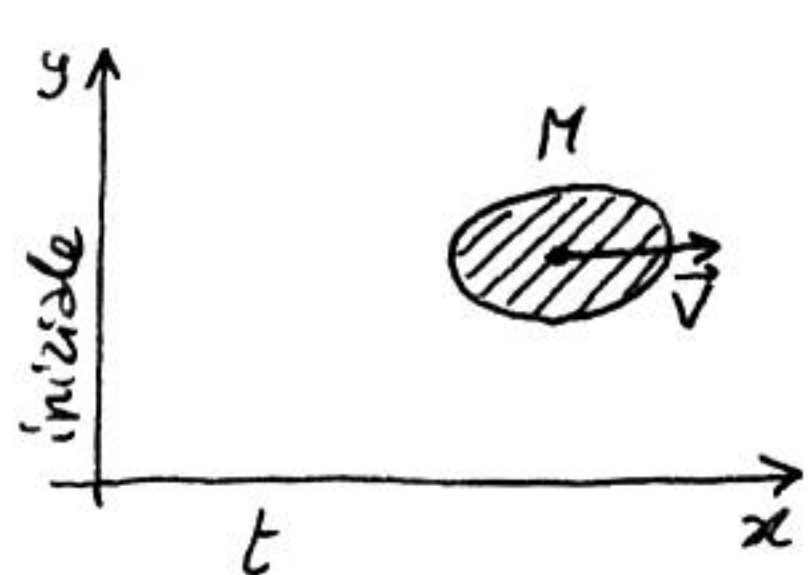
$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{\frac{1}{2} \frac{v_b^2 m_b^2}{m_a}}{\frac{1}{2} m_b v_b^2} = \frac{m_b}{m_a}$$

Le stesse considerazioni valgono per una palla lanciata in alto; la QM della palla (B), diretta verticalmente verso l'alto, è compensata dalla QM della Terra (A), diretta verticalmente verso il basso. La Terra si muove perciò leggermente in direzione opposta al moto della palla. Le equazioni per i calcoli sono le stesse (anche se qui la forza interna non è elastica ma gravitazionale). $\frac{K_A}{K_B}$ è una quantità piccolissima e trascurabile.



Un proiettile, seguendo una traiettoria parabolica, esplode prima di toccare terra. Il CM dei frammenti continua a seguire la traiettoria parabolica originale, ~~perché continua a essere soggetto alla gravità, che è l'unica forza esterna che agisce sul sistema; la QM totale del sistema non è variata, sebbene siano variate le QM dei frammenti.~~

SISTEMI A MASSA VARIABILE



Le successive equazioni non possono essere applicate a un sistema a massa variabile; occorre invece considerare un sistema a massa costante, nel quale avviene uno scambio di masse tra le parti. Perciò si deve definire il sistema in maniera ampia, in modo che all'interno la massa sia costante, (qui le forze esterne non sono la spinta della massa Δm che esce, ma la forza di gravità, gli attriti vari, ecc.)

$$\vec{F}_{\text{est}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

(qui le forze esterne non sono la spinta della massa Δm che esce, ma la forza di gravità, gli attriti vari, ecc.)

e, per un intervallo finito di tempo Δt , sarà approssimativamente $\vec{F}_{\text{est}} \approx \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{\vec{P}_{\text{finale}} - \vec{P}_{\text{iniziale}}}{\Delta t}$

Essendo $\vec{P}_{\text{finale}} = (M - \Delta M)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) + \Delta M \vec{u}$ e $\vec{P}_{\text{iniziale}} = M \vec{v}$

possiamo scrivere $\vec{F}_{\text{est}} \approx \frac{(M - \Delta M)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) + \Delta M \vec{u} - M \vec{v}}{\Delta t} = M \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} + [\vec{u} - (\vec{v} + \Delta \vec{v})] \frac{\Delta M}{\Delta t}$

Se ora $\Delta t \rightarrow 0$, la configurazione finale tende a quella iniziale, e si ha:

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} \rightarrow - \frac{dM}{dt}$$

(negativa perché il corpo ~~perde~~ diminuisce di massa)

$$\Delta \vec{v} \rightarrow 0$$

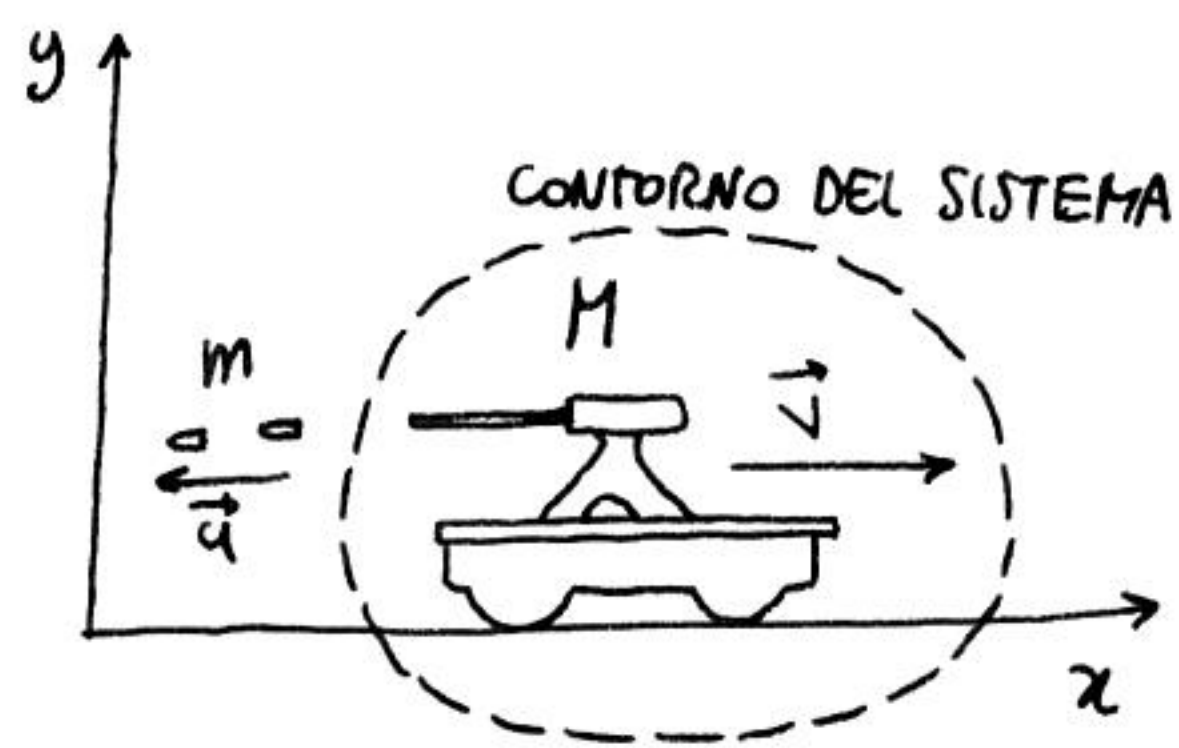
perciò l'equazione diventa $\vec{F}_{\text{est}} = M \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dM}{dt} - \vec{u} \frac{dM}{dt} = \frac{d(M\vec{v})}{dt} - \vec{u} \frac{dM}{dt}$

In alcuni casi (ad esempio i problemi sui razzi) è più conveniente definire un sistema a massa variabile.

In tal caso, l'equazione diventa $\vec{F}_{\text{est}} = M \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dM}{dt} - \vec{u} \frac{dM}{dt} = M \frac{d\vec{v}}{dt} - (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dM}{dt}$
da cui $M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{est}} + (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dM}{dt}$

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{v}_{\text{rel}}$ velocità relativa della massa espulsa rispetto al corpo principale

$(\vec{u} - \vec{v}) \frac{dM}{dt} = \vec{F}_{\text{reazione}}$ forza esercitata sul sistema dalla massa che ne esce (o ne entra), in un razzo è chiamata SPINTA



Mitragliatrice, montata su un carrello, che spara proiettili.
 Massa sistema (carrello + mitragliatrice) in un certo istante = M
 Massa pallottola sparata (ciascuna) nello stesso istante = m
 Velocità carrello = $\vec{V}$
 Velocità pallottola = $\vec{u}$
 Velocità pallottola rispetto al carrello = $\vec{u} - \vec{V} = \vec{V}_{rel}$
 Pallottole sparate nell'unità di tempo = n
 Qual è l'accelerazione del sistema?
 Non agiscono forze esterne, per cui $\vec{F}_{est} = 0$

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V}_{rel} \frac{dM}{dt}$$

$$\text{da cui } \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V}_{rel} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{dM}{dt} = (\vec{u} - \vec{V}) \frac{mn}{M} \quad \text{accelerazione del sistema}$$

$$\text{La forza di spinta in quell'istante } \vec{F} = \vec{V}_{rel} \frac{dM}{dt} = (\vec{u} - \vec{V}) mn$$

Un razzo pesa 20000 kgf quando è pieno di carburante. Viene acceso e lanciato verso l'alto verticalmente e il suo peso quando il carburante è finito è 10000 kgf. I gas vengono espulsi costantemente al ritmo di 200 kg/s con velocità relativa al razzo di 1500 m/s.

Quante è la spinta?

$$\vec{F} = \vec{V}_{rel} \frac{dM}{dt} = 1500 \cdot 200 = 3 \cdot 10^5 \text{ N}$$

Tenere presente che all'inizio, quando il razzo è ancora a terra, la forza ~~resultante~~ è data dalla risultante tra spinta ($3 \cdot 10^5 \text{ N}$) e peso del razzo pieno ($20000 \text{ kgf} = 1,96 \cdot 10^5 \text{ N}$) ovvero $1,04 \cdot 10^5 \text{ N}$.

Quale sarà la velocità del razzo una volta esaurito tutto il carburante? (Trascurare la gravità)

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V}_{rel} \frac{dM}{dt} \rightarrow d\vec{V} = \vec{V}_{rel} \frac{dM}{M} \rightarrow \int_{V_0}^V d\vec{V} = \vec{V}_{rel} \int_{M_0}^M \frac{dM}{M} \rightarrow$$

$$\vec{V} - \vec{V}_0 = \vec{V}_{rel} (\log M - \log M_0) = \vec{V}_{rel} \log \frac{M}{M_0} = -\vec{V}_{rel} \log \frac{M_0}{M}$$

$$\text{E } V_0 = 0 \text{ e } \frac{M_0}{M} = \frac{20000}{10000} = 2, \text{ perciò si ha}$$

$$V = 1500 \cdot \log 2 = 1035 \text{ m/s}$$

Un uomo di massa m si arrampica su una corda che pende da un pallone di massa M fermo rispetto al suolo. Se l'uomo sale con velocità v (rispetto alla corda), con quale velocità v_2 (rispetto al suolo) si muoverà il pallone?

Poiché sul sistema non agiscono forze esterne, il sistema (uomo + pallone) avrà Q_M costante, e la somma delle Q_M dei componenti sarà nulla, poiché inizialmente il sistema era fermo.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \quad \text{dove} \quad m_1 = \text{massa uomo}$$

$v_1 = \text{velocità uomo rispetto alla corda}$

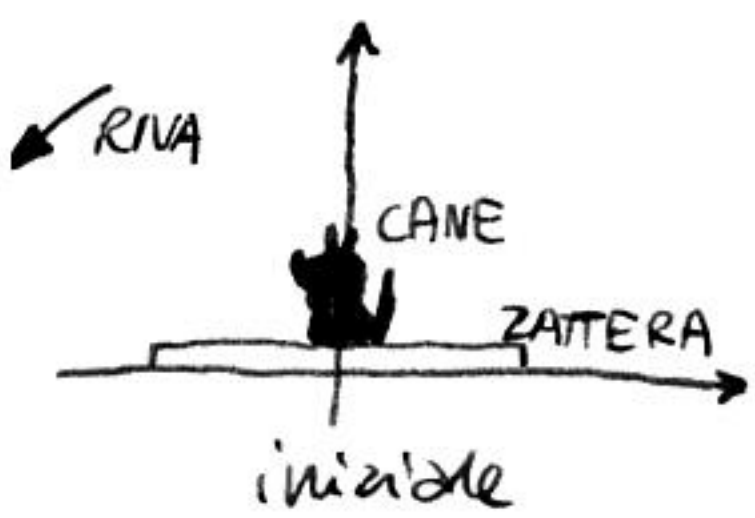
$m_2 = \text{massa uomo + pallone}$ (il pallone si muove per reazione al movimento dell'uomo; calcolando le Q_M , dobbiamo ricordarci di includere in m_2 , oltre alla massa del pallone, anche quella dell'uomo, perché l'uomo è attaccato al pallone,
 $v_2 = \text{velocità pallone rispetto al suolo (incognita)}$

quindi $mv + (m+M)v_p = 0$ ossia $v_p = -\frac{mv}{m+M}$ (negativa perché il pallone si muove verso il basso)

Quando l'uomo smette di arrampicarsi, il pallone si arresta.

Un cane di peso 5 kgf è fermo su una zattera e dista 6 m dalla riva. Esso cammina per 3 m sulla zattera verso la riva e si ferma. La zattera pesa 20 kgf. Quanto dista il cane dalla riva alla fine dello spostamento? (Trascurare l'attrito acqua-zattera)

Poiché sul sistema cane + zattera non agiscono forze esterne, il suo CM non si muoverà. Scegliamo un sistema di coordinate con l'origine nel CM del sistema:



la formula per le coordinate del CM
 e' $x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

$$x_{CM} = 0$$

$$x_{CM} = \frac{-3 \cdot 5 + \Delta x_z \cdot 25}{25}$$

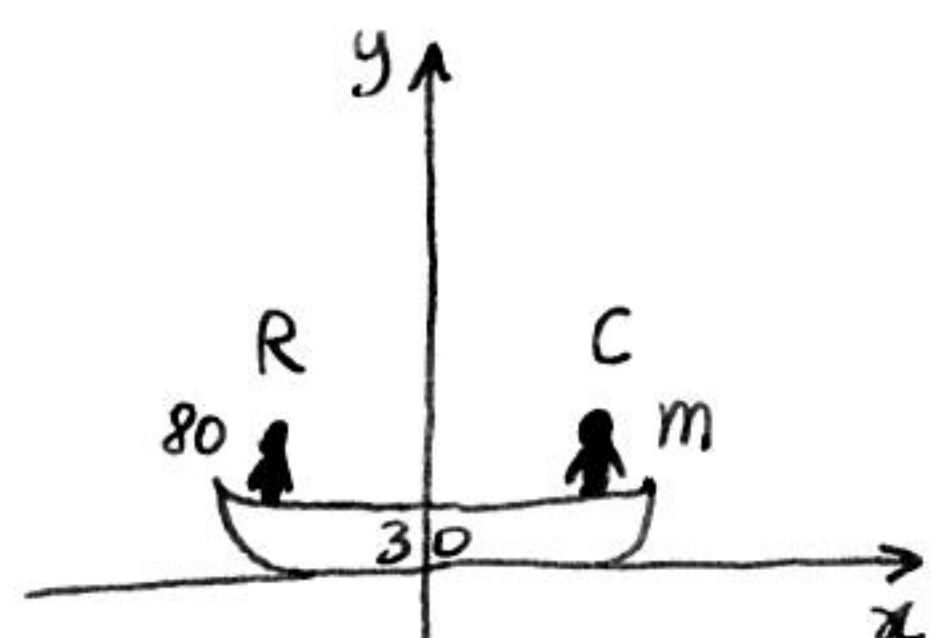
qui m_2 è la massa di cane + zattera perché essi si muovono insieme.
 Δx_z è lo spostamento della zattera (in direzione opposta alla riva)

per cui $\frac{-3 \cdot 5 + \Delta x_z \cdot 25}{25} = 0$ da cui $\Delta x_z = 0,6 \text{ m}$

Il cane ha camminato per 3 m sulla zattera in direzione opposta.

Il cane perciò nella configurazione finale dista dalla riva $6 - (3 - 0,6) \text{ metri} = 3,6 \text{ m}$.

Ricardo, di massa 80 kg, e Carmelita sono su una canoa di 30 kg. Essi si scambiano posto; i posti originari distavano 3 m ed erano simmetrici rispetto al centro della canoa. La canoa si è spostata di 0,4 m. Quanto vale la massa di Carmelita?



Il CM del sistema non si muove, poiché non agiscono forze esterne.

Usiamo la formula $x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

$$x_{CM} = \frac{80 \cdot (-1,5) + m \cdot 1,5 + 30 \cdot 0}{80 + m + 30} = \frac{80 \cdot 1,5 + m \cdot (-1,5) + 30 \cdot 0}{80 + m + 30} \pm 0,4$$

↑
configurazione iniziale

↑
configurazione finale

↑
Spostamento di coordinate dovuto allo scambio di posti

Non sappiamo in che direzione si è spostata la canoa; ciò dipende dal fatto che Carmelita sia più pesante o più leggera di Ricardo.

Risolvendo l'equazione per $-0,4$, si ha $m = 57,6$ kg.

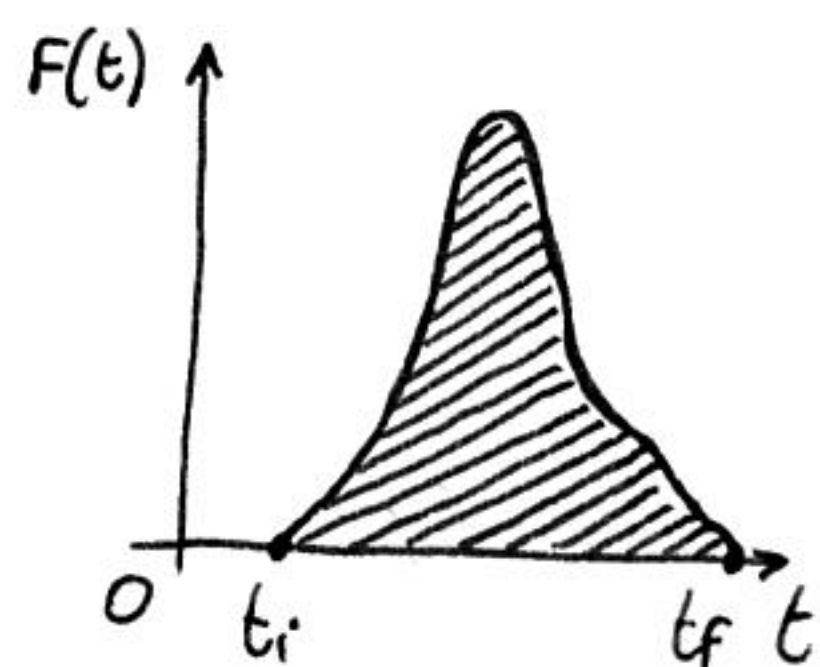
Risolvendo l'equazione per $+0,4$, si ha $m = 109,2$ kg.

Carmelita pesa 57,6 kg oppure 109,2 kg.

10 URTI

In un urto su ciascuna delle parti collidenti agisce una forza relativamente grande per un tempo relativamente breve. Tali forze che agiscono per un tempo breve rispetto al tempo di osservazione sono chiamate forze impulsive.

Possiamo comprendere nella categoria degli urti anche quegli eventi nei quali l'identità delle particelle interagenti muta durante l'evento (decadimenti, ecc.).



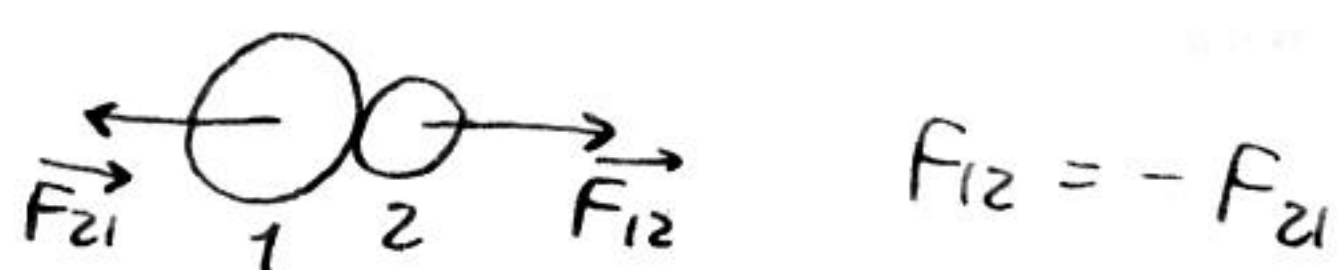
← variazione di una forza impulsiva durante un urto che inizia a t_i e finisce a t_f

$$d\vec{p} = \vec{F} dt$$

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \vec{J} \quad \text{IMPULSO della forza} \quad (= \text{variazione della QM di un corpo sul quale agisce una forza impulsiva})$$

Due particelle durante un urto:

le forze che ognuna esercita sull'altra sono, istante per istante, uguali e contrarie.



$$F_{12} = -F_{21}$$

la variazione di QM per la particella 1 e- $\Delta\vec{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_1 dt = \vec{F}_1 \Delta t$
e per la particella 2 e- $\Delta\vec{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_2 dt = \vec{F}_2 \Delta t$

$$\text{Ma } \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \rightarrow \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \rightarrow \Delta P = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$

in un urto
la QM si conserva
(in assenza di
forze esterne)

In un urto le forze impulsive sono enormi rispetto alle ~~eventuali~~ forze esterne (attriti, ecc.) e queste ultime possono perciò venire trascurate, durante l'urto.

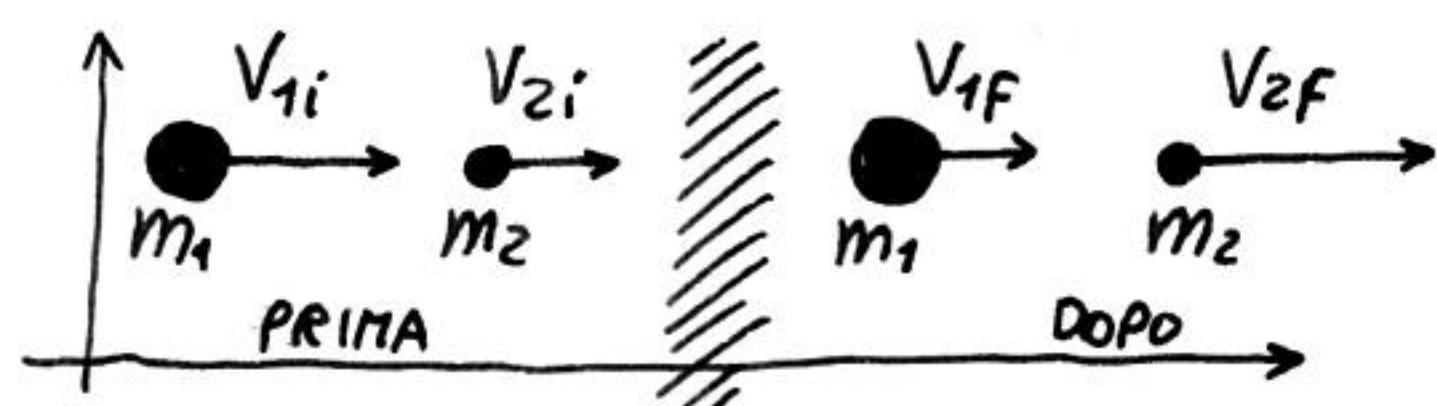
Classificazione degli urti (falta riguardo alla conservazione dell'energia cinetica):

URTI ELASTICI l'energia cinetica si conserva

URTI ANELASTICI " " non si conserva

URTI COMPLETAMENTE ANELASTICI i due corpi rimangono attaccati l'altro

URTO ELASTICO UNIDIMENSIONALE



Ci sono noti m_1, m_2, v_{1i} e v_{2i}
Vogliamo conoscere v_{1f} e v_{2f} (velocità dopo l'urto)

Per la conservazione della QM, $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$

e per la conservazione dell'energia cinetica, $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$

Mettendo a sistema, si ottiene

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

Notare che $v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}$

la velocità relativa di avvicinamento prima dell'urto è uguale alla velocità relativa di separazione dopo l'urto

Se $m_1 = m_2 \rightarrow v_{1f} = v_{2i}$ e $v_{2f} = v_{1i}$

Se le due particelle sono di uguale massa, le velocità si scambiano

Se $v_{2i} = 0$ e $m_1 = m_2 \rightarrow v_{1f} = 0$ e $v_{2f} = v_{1i}$

Se le due particelle sono di uguale massa e m_2 è ferma inizialmente, m_1 si ferma e m_2 si muove con la stessa velocità che aveva prima m_1

Se $v_{2i} = 0$ e $m_1 \ll m_2 \rightarrow v_{1f} \approx -v_{1i}$ e $v_{2f} \approx 0$

Se m_2 è ferma inizialmente e m_1 è molto più piccola di m_2 , m_1 rimbalza e si allontana da m_2 con la stessa velocità con cui si avvicinava, e m_2 resta pressoché ferma

Se $v_{2i} = 0$ e $m_1 \gg m_2 \rightarrow v_{1f} \approx v_{1i}$ e $v_{2f} \approx 2v_{1i}$

Se m_2 è ferma inizialmente e m_1 è molto più grande di m_2 , m_1 prosegue con velocità pressoché invariata e m_2 schizza via con velocità doppia di m_1

URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO

$$m_1 \vec{V}_{1i} + m_2 \vec{V}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{V}_F \quad \text{le due particelle restano attaccate insieme}$$

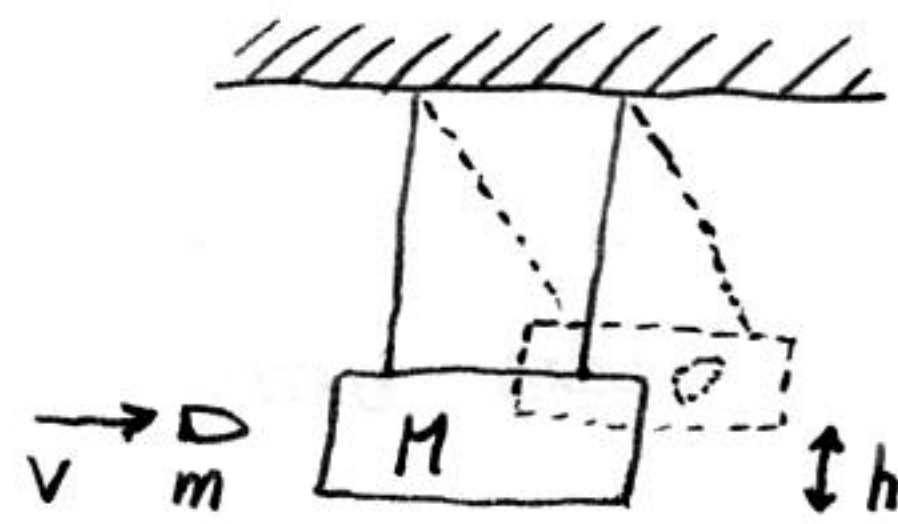
Una palla da baseball avente una massa di 100 g viene colpita da una mazza neutre che vola orizzontalmente alla velocità di 30 m/s. Dopo l'urto la palla vola orizzontalmente nel verso opposto con una velocità di 40 m/s. Determinare l'impulso nella collisione.

$$\vec{J} = \vec{p}_F - \vec{p}_i = m(\vec{V}_F - \vec{V}_i) = 0,1(-40 - 30) = -7 \text{ N}\cdot\text{s}$$

Se l'urto ha una durata di 10^{-3} s, qual è la forza agente?

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{-7}{10^{-3}} = -7000 \text{ N}$$

PENDOLO BALISTICO



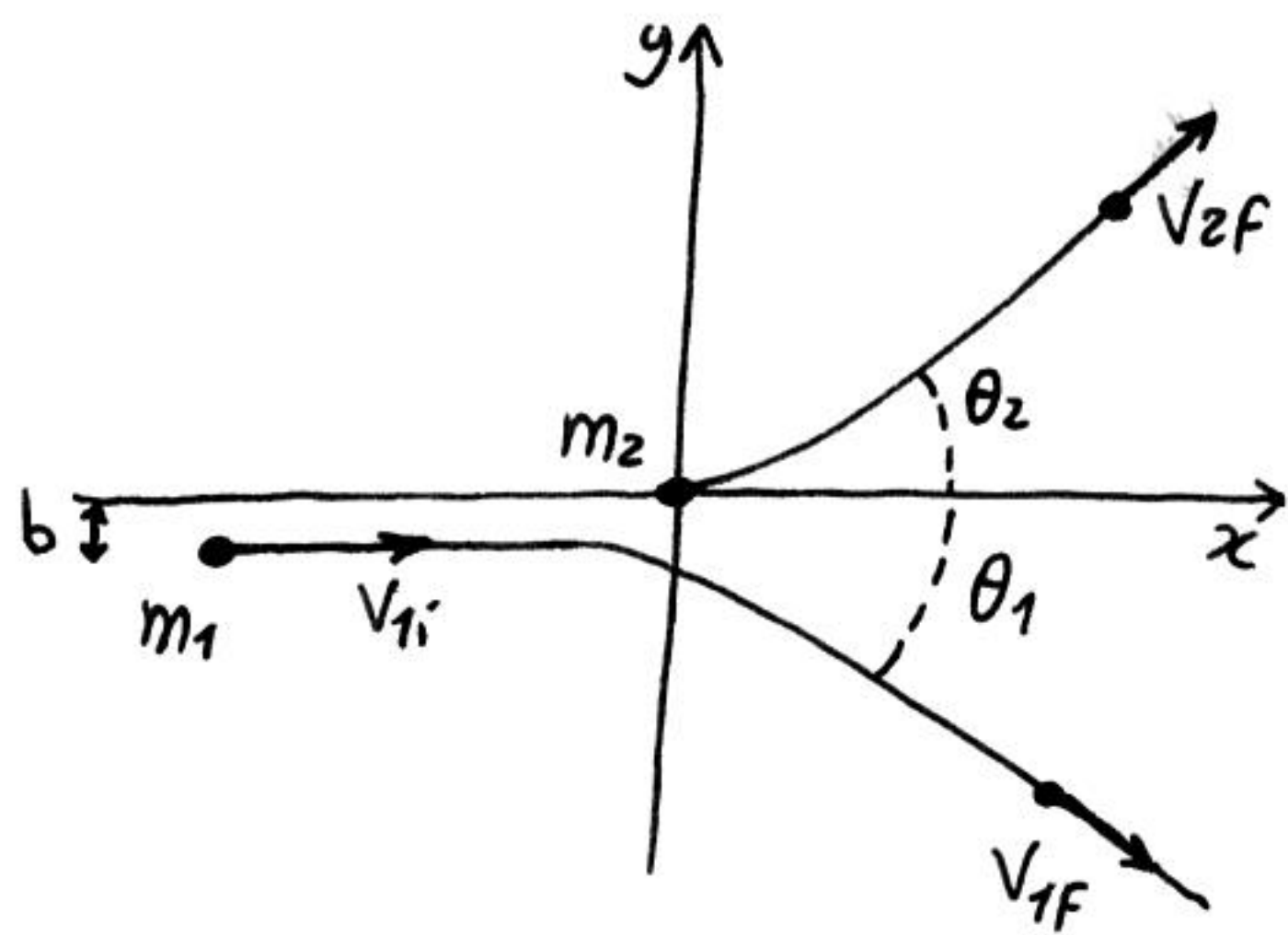
$$\frac{1}{2} m v^2 = (M+m) g h$$

possiamo perciò trovare ~~direttamente~~ di quanto si solleva il pendolo balistico nota la velocità del proiettile, o viceversa

La velocità del CM di un sistema non è alterata da un urto (qualsiasi tipo di urto) tra particelle del sistema.

Durante un urto, scegliendo un sist. di rif. solidale col CM, si ha sempre $\vec{V}_{CM} = 0$ e $\vec{p} = 0$.

URTO BIDIMENSIONALE (ELASTICO O ANELASTICO)



b = distanza fra traiettoria iniziale m_1 e asse x = PARAMETRO D'URTO
(per $b=0$, l'urto è frontale e m_1 e m_2 si muoveranno sull'asse x)

m_2 all'inizio è immobile (se non lo è, scegliamo un sist. di rif. tale che lo sia)

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2 \\ 0 = m_1 v_{1f} \sin \theta_1 - m_2 v_{2f} \sin \theta_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

conservazione della QM, asse x

conservazione della QM, asse y

conservazione dell'energia cinetica
(applicabile solo per urti elastici)

valori noti:

m_1

m_2

v_{1i}

incognite:

v_{1f}

v_{2f}

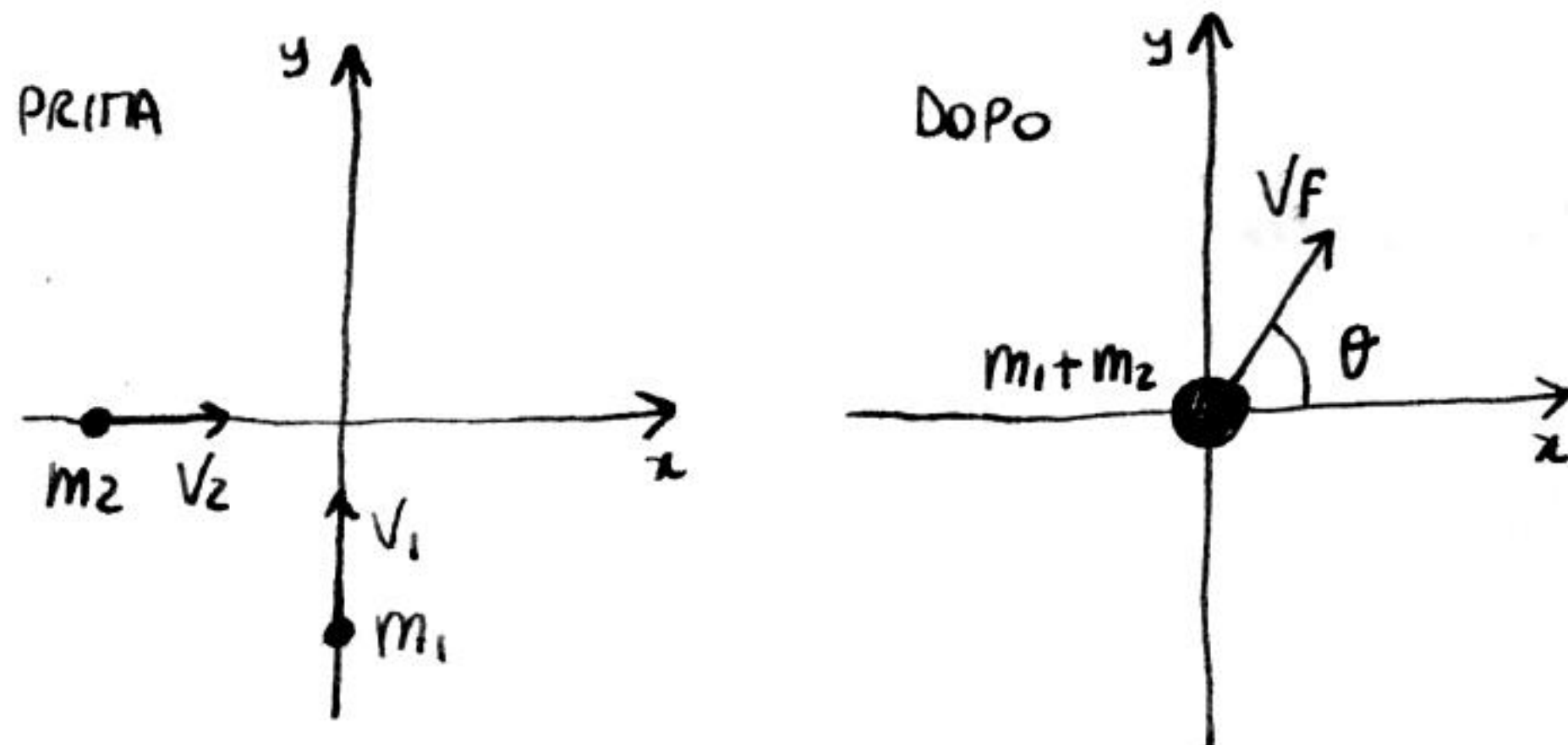
θ_1

θ_2

3 equazioni in 4 incognite:
però possiamo studiare l'urto solo se assegniamo un valore a una delle incognite (ad es. a θ_1)

COMPLETAMENTE

URTO BIDIMENSIONALE ANELASTICO



Conosciamo m_1, m_2, v_1 e v_2

Vogliamo conoscere v_F e θ

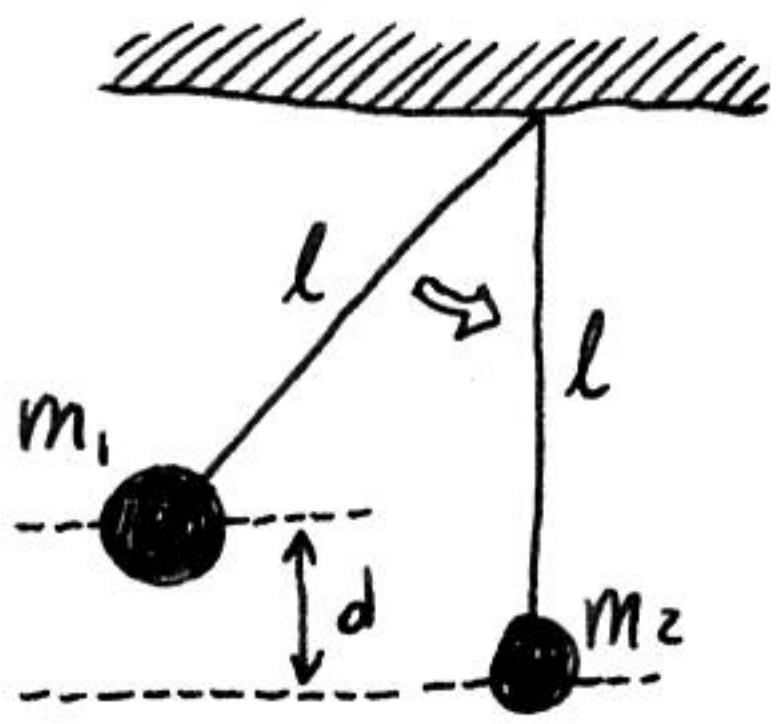
$$\begin{cases} m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_F \sin \theta \\ m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_F \cos \theta \end{cases}$$

conservazione della QM, asse y

" " asse x

dividendo membro a membro, si ha $\tan \theta = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} \rightarrow \theta = \arctan \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2}$

una volta noto θ , si sostituisce in una qualsiasi delle due equazioni del sistema e si può trovare v_F



Due pendoli di lunghezza l sono disposti inizialmente come in figura. Il primo pendolo viene lasciato libero e colpisce il secondo. Supponendo un urto completamente anelastico, di quanto si alza il CM del sistema dopo l'urto?

$$m_1 v_i + 0 = (m_1 + m_2) v_f$$

dalla relazione $v_x = \sqrt{2g s_x}$, che ci dice a che velocità arriva al suolo un corpo lasciato cadere dall'altezza s_x con gravità g , posso passare dalla velocità all'altezza.

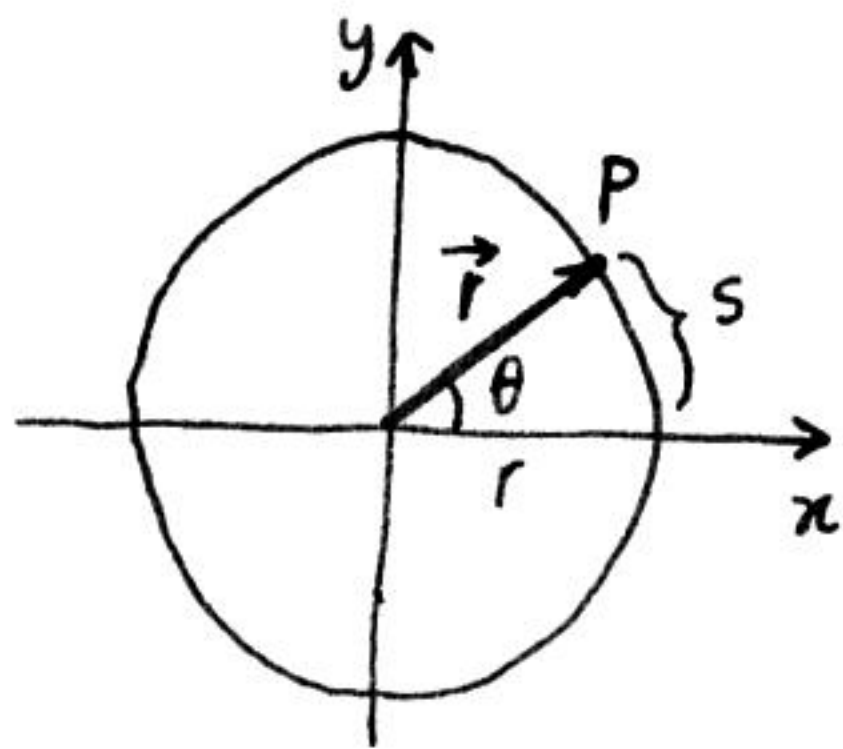
Un corpo che cade da un'altezza d giunge al suolo con una velocità $v_i = \sqrt{2gd}$, mentre un corpo lanciato verso l'alto con velocità v_f arriverà a un'altezza h tale che sia $v_f = \sqrt{2gh}$. Perciò,

$$m_1 \sqrt{2gd} = (m_1 + m_2) \sqrt{2gh}$$

$$h = \frac{d m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

11 CINEMATICA ROTAZIONALE

Si dice che il moto di un corpo rigido (*) è puramente rotatorio se tutte le particelle del corpo si muovono su dei cerchi concentrici, il cui centro è una retta detta asse di rotazione.



$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\text{in radianti})$$

P è un qualsiasi punto del corpo in rotazione.

velocità angolare media $\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

θ_1 è l'angolo che il vettore posizione $\vec{r}$ forma con l'asse x al tempo t_1 .

velocità angolare istantanea $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

accelerazione angolare media $\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

ω_1 è la velocità angolare istantanea al tempo t_1 .

accelerazione angolare istantanea $\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

Moto TRASLATORIO (direzione fissa)
Grandezze lineari

Moto ROTATORIO (asse fisso)
Grandezze angolari

$$v = v_0 + at$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$x = \frac{v + v_0}{2} t$$

$$\theta = \frac{\omega + \omega_0}{2} t$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

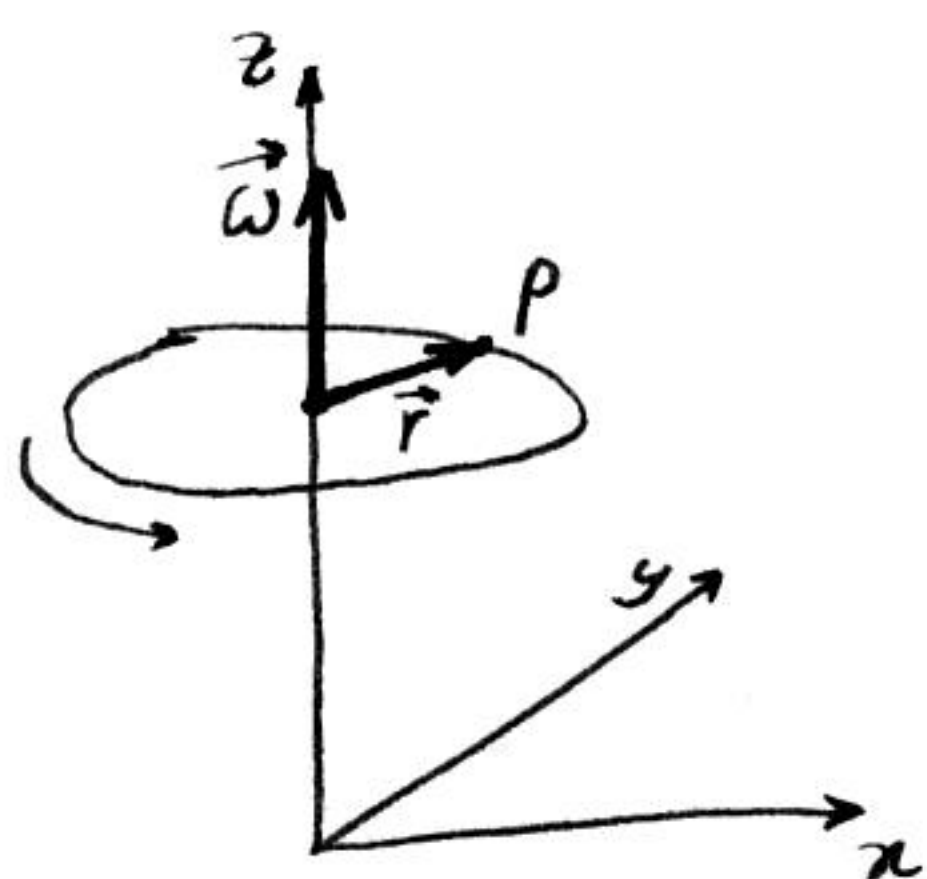
La differenza dimensionale tra grandezze angolari e grandezze lineari è una lunghezza.

← equazioni per $a = \text{cost}$ $\alpha = \text{cost}$

(*) un corpo rigido è un corpo le cui particelle mantengono fisse le loro posizioni reciproche.

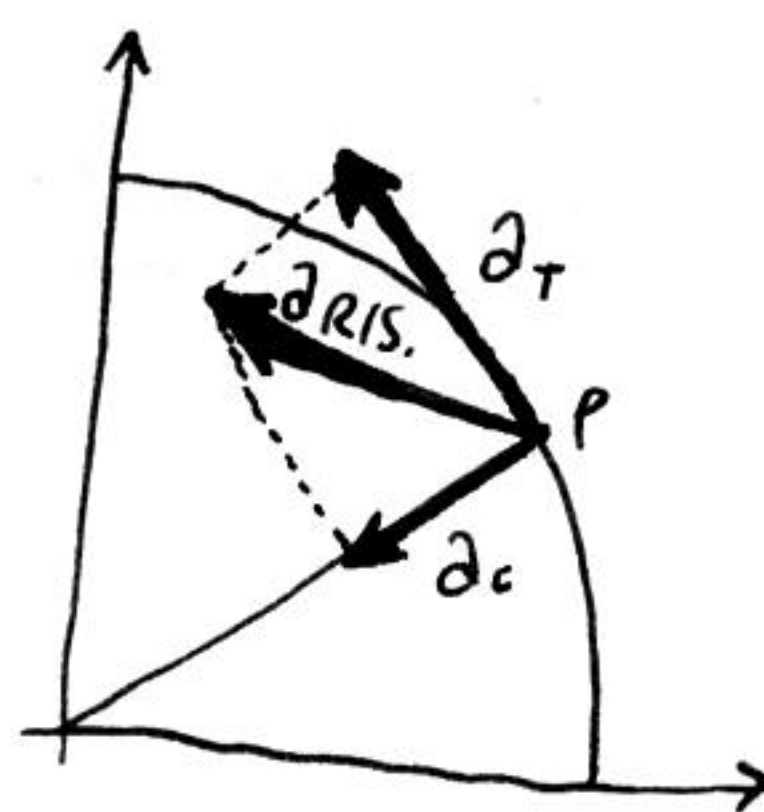
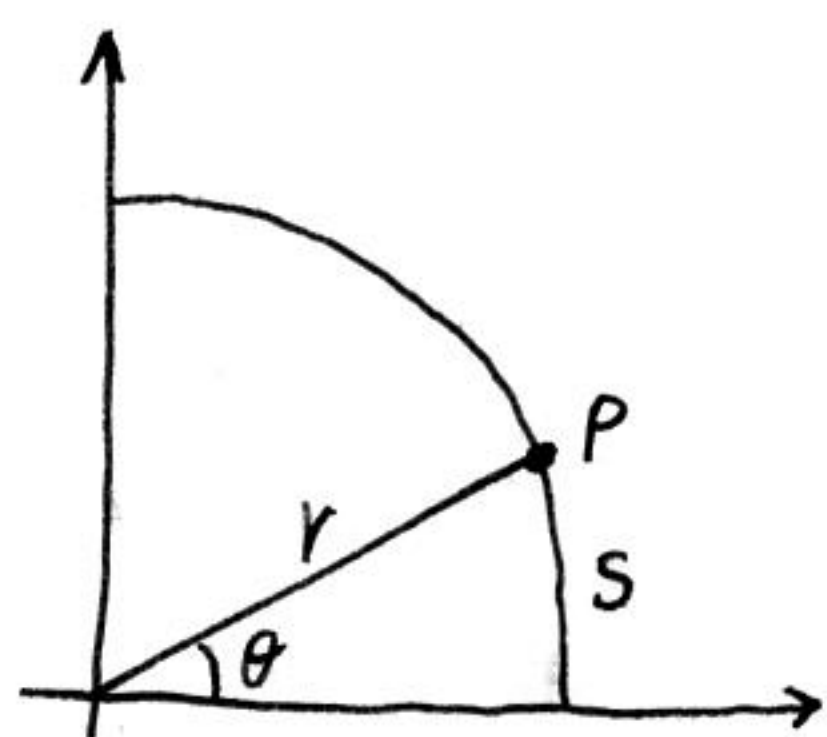
Ruotiamo un oggetto di un angolo θ_1 attorno all'asse x e poi di un angolo θ_2 attorno all'asse y ; esso assumerà una certa orientazione. Se lo ruotiamo invece di un angolo θ_2 attorno all'asse y e poi di un angolo θ_1 attorno all'asse x , invertendo così l'ordine delle rotazioni, esso assumerà una orientazione diversa dalla prima. Si ha insomma $\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 \neq \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$. Perciò lo spostamento angolare θ non è un vettore, perché non possiede la proprietà commutativa dell'addizione fra vettori.

Tale differenza tra le due orientazioni diminuisce al diminuire di θ_1 e θ_2 . Quando θ_1 e θ_2 sono infinitesimi, praticamente l'ordine delle rotazioni è indifferente. Perciò gli spostamenti angolari infinitesimi sono vettori, e sono vettori anche quelle grandezze derivate per mezzo loro, come ad es. la velocità angolare $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.



$\vec{\omega}$ è la velocità angolare del punto P.

La sua direzione è l'asse di rotazione (asse z), e il verso è trovato mediante la regola della mano destra.



$$\theta = \frac{s}{r} \rightarrow s = \theta r \rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r \rightarrow \boxed{v = \omega r}$$

v = velocità lineare
 ω = velocità angolare

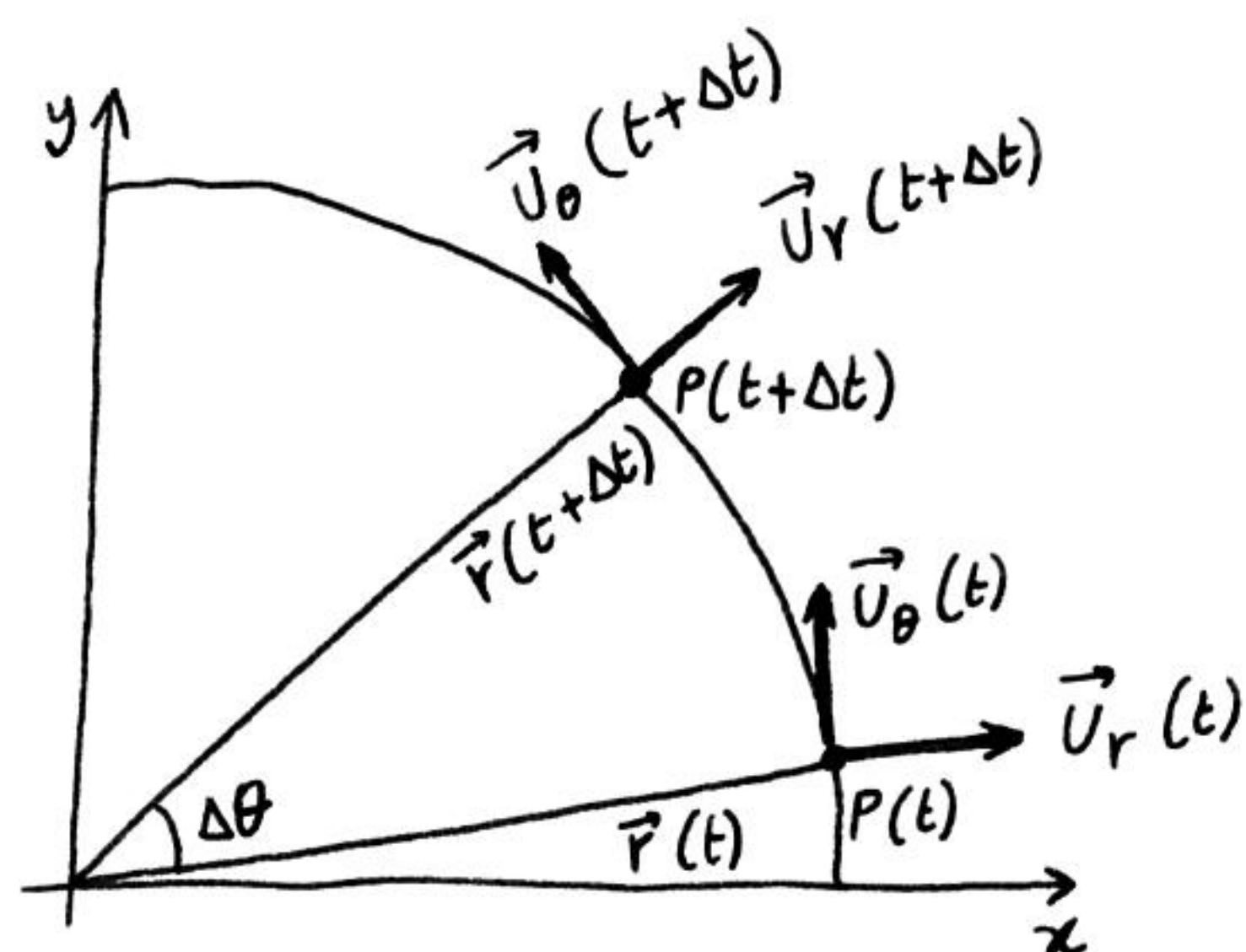
$$v = \omega r \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r \rightarrow \boxed{a_T = \alpha r}$$

a_T = accelerazione tangenziale
 α = accelerazione angolare

ricordiamo che è anche $\boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$

a_c = accelerazione centripeta

RELAZIONI IN FORMA VETTORIALE TRA CINEMATICA LINEARE E CINEMATICA ANGOLARE DI UNA PARTICELLA IN MOTO CIRCOLARE.

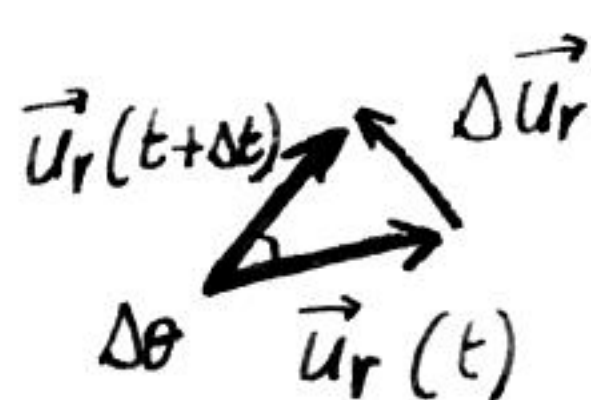


$\vec{u}_r$ e $\vec{u}_\theta$ sono versori (in coordinate polari)
~~di~~

Il raggio r è costante: ~~il raggio~~ $\vec{r} = \vec{u}_r \cdot r$

derivando, si ha $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{dt} r$ (I)

r è costante, ma $\vec{r}$ e $\vec{u}_r$ no, poiché le loro direzioni mutano col tempo



(perché $\vec{u}_r(t)$ e $\vec{u}_r(t+\Delta t)$ sono versori e quindi di modulo unitario)

notiamo che $\Delta \vec{u}_r = \Delta \theta \vec{u}_\theta$ (per $\Delta \theta$ piccolo, possiamo trascurare la differenza tra corda e arco)

la direzione di $\Delta \vec{u}_r$ (per $\Delta \theta$ piccolo) è quella di $\vec{u}_\theta$

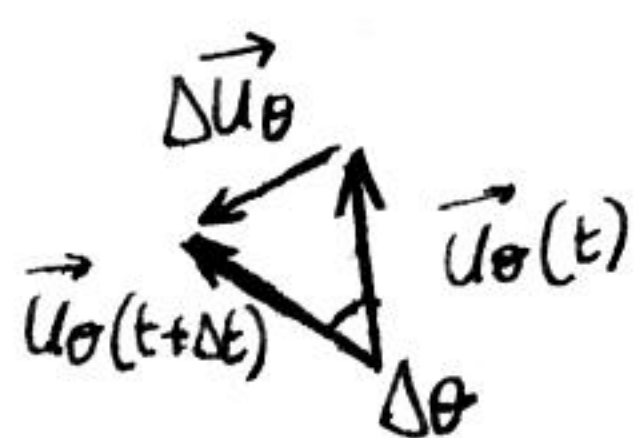
perciò si ha: $\Delta \vec{u}_r \simeq \vec{u}_\theta \Delta \theta$

dividendo per Δt , si ha $\frac{\Delta \vec{u}_r}{\Delta t} \simeq \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \vec{u}_\theta$

e, per $\Delta t \rightarrow 0$, $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta = \omega \vec{u}_\theta$

Sostituendo in (I), si ha $\frac{d\vec{r}}{dt} = \omega \vec{u}_\theta r$ cioè $\vec{v} = \vec{u}_\theta \omega r$ che corrisponde alla relazione scalare $v = \omega r$.

Derivando nuovamente, si ha $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}_\theta \frac{d\omega}{dt} r + \omega \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} r$ (II)



notiamo che $\Delta \vec{u}_\theta = \Delta \theta (-\vec{u}_r)$ (per $\Delta \theta$ piccolo, possiamo trascurare la differenza tra corda e arco).
la direzione di $\Delta \vec{u}_\theta$ (per $\Delta \theta$ piccolo) è quella di $-\vec{u}_r$

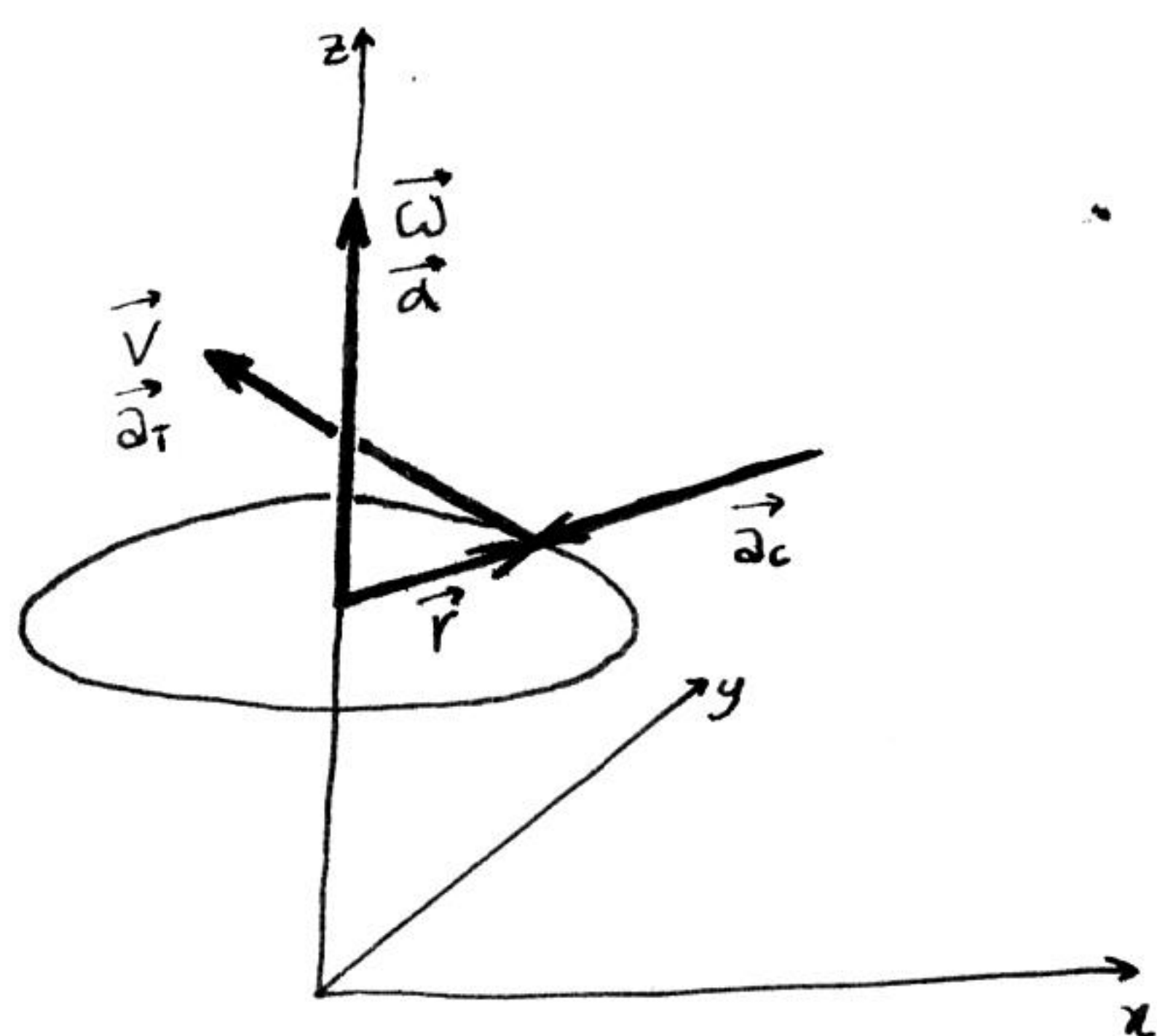
perciò si ha: $\Delta \vec{u}_\theta = -\vec{u}_r \Delta \theta$

dividendo per Δt , si ha $\frac{\Delta \vec{u}_\theta}{\Delta t} = -\vec{u}_r \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$

e, per $\Delta t \rightarrow 0$, $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{u}_r \frac{d\theta}{dt} = -\omega \vec{u}_r$.

Sostituendo in (II), si ha $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}_\theta \frac{d\omega}{dt} r - \omega^2 r \vec{u}_r$. cioè $\vec{a} = \vec{u}_\theta \alpha r - \omega^2 r \vec{u}_r$

Questa $\vec{a}$ è la risultante dell'accelerazione tangenziale $a_T = \alpha r$ e di quella centripeta $a_c = \omega^2 r$.

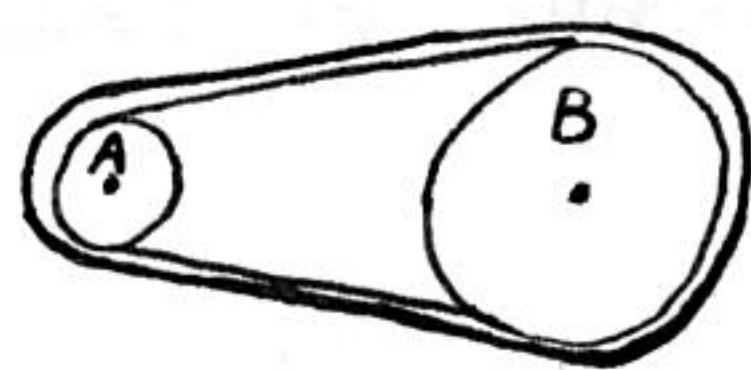


$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}$$

La ruota A di raggio $R_A = 10$ cm viene collegata con una cinghia alla ruota B di raggio $R_B = 25$ cm. La A aumenta la sua velocità angolare da ferma al ritmo costante di $\frac{\pi}{2}$ rad/s². Determinare il tempo necessario perché la B raggiunga la velocità angolare di 100 giri/min.



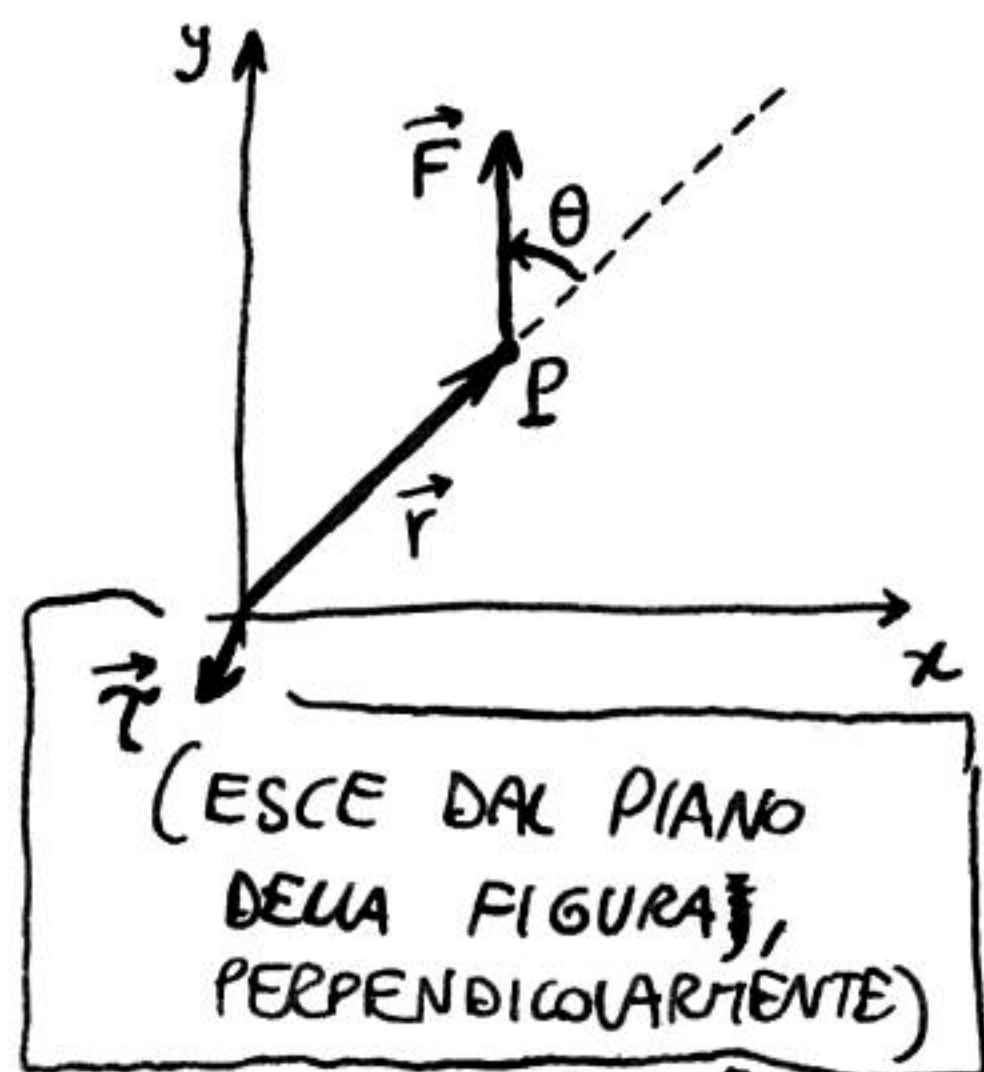
$$\omega_B = 100 \frac{\text{giri}}{\text{min}} = \frac{200\pi}{60} \text{ rad/s}$$

$$\omega_A = \omega_B \cdot R_B \cdot \frac{1}{R_A} = \frac{200\pi}{60} \cdot \frac{25}{10} \text{ rad/s} = \frac{25}{3}\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = \alpha t \rightarrow t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\frac{25}{3}\pi \text{ rad/s}}{\frac{\pi}{2} \text{ rad/s}^2} = \frac{50}{3} \text{ s} \approx 17 \text{ secondi.}$$

12 DINAMICA ROTAZIONALE

La dinamica rotazionale studia le cause delle rotazioni (le forze).



Sul punto materiale P, la cui posizione è individuata da $\vec{r}$, agisce una forza $\vec{F}$; il momento meccanico (che è l'analogo rotazionale della forza per moti lineari) è $\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

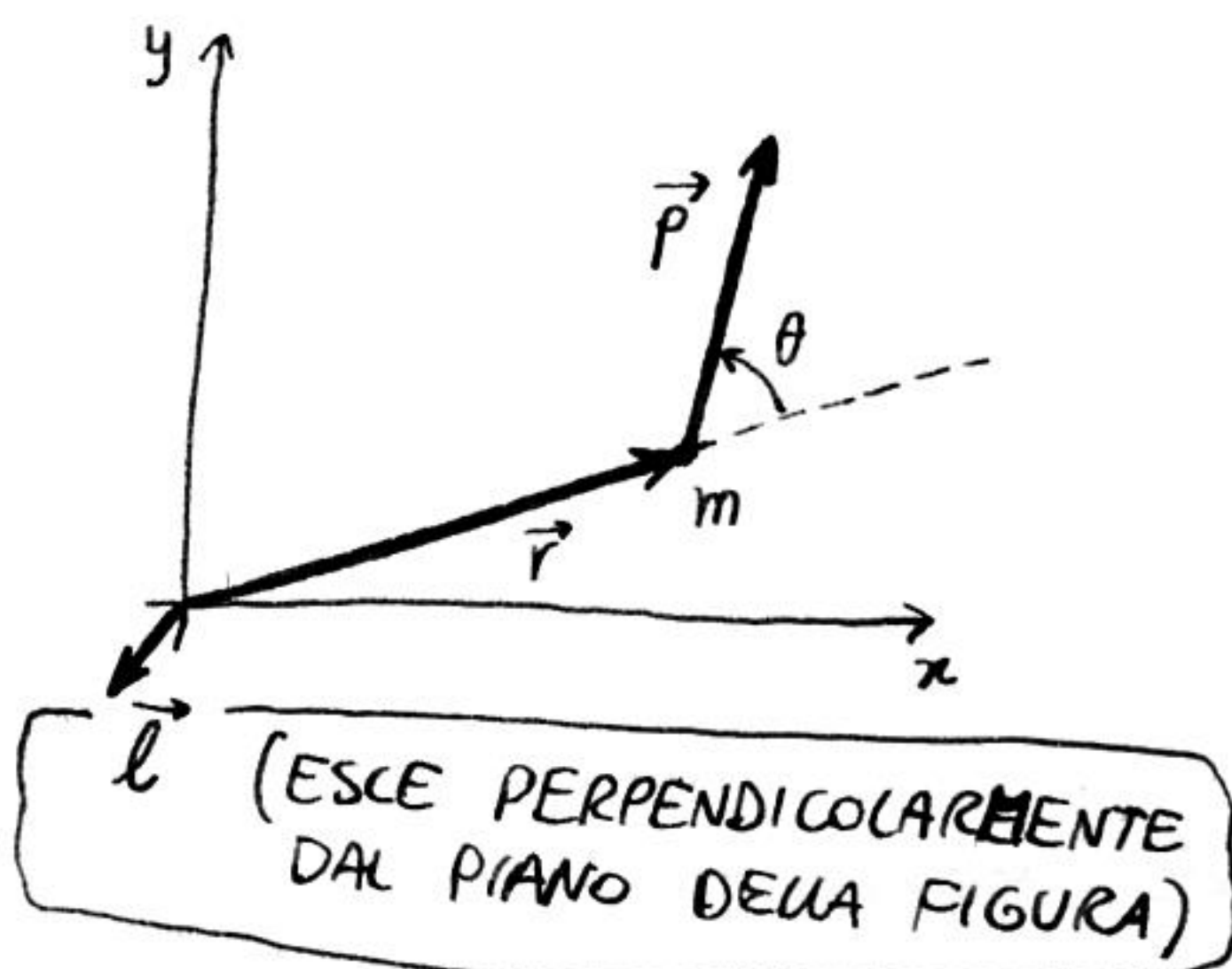
MOMENTO MECCANICO $\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$. MOMENTO DELLA FORZA
il modulo di $\vec{\tau}$ è $\tau = r \cdot F \sin \theta$



$r \sin \theta$ è la componente di $\vec{r}$ ~~perpendicolare~~ perpendicolare a $\vec{F}$ e si chiama BRACCIO DELLA FORZA

il momento ha le stesse dimensioni del lavoro, ma il momento è un vettore mentre il lavoro è uno scalare.

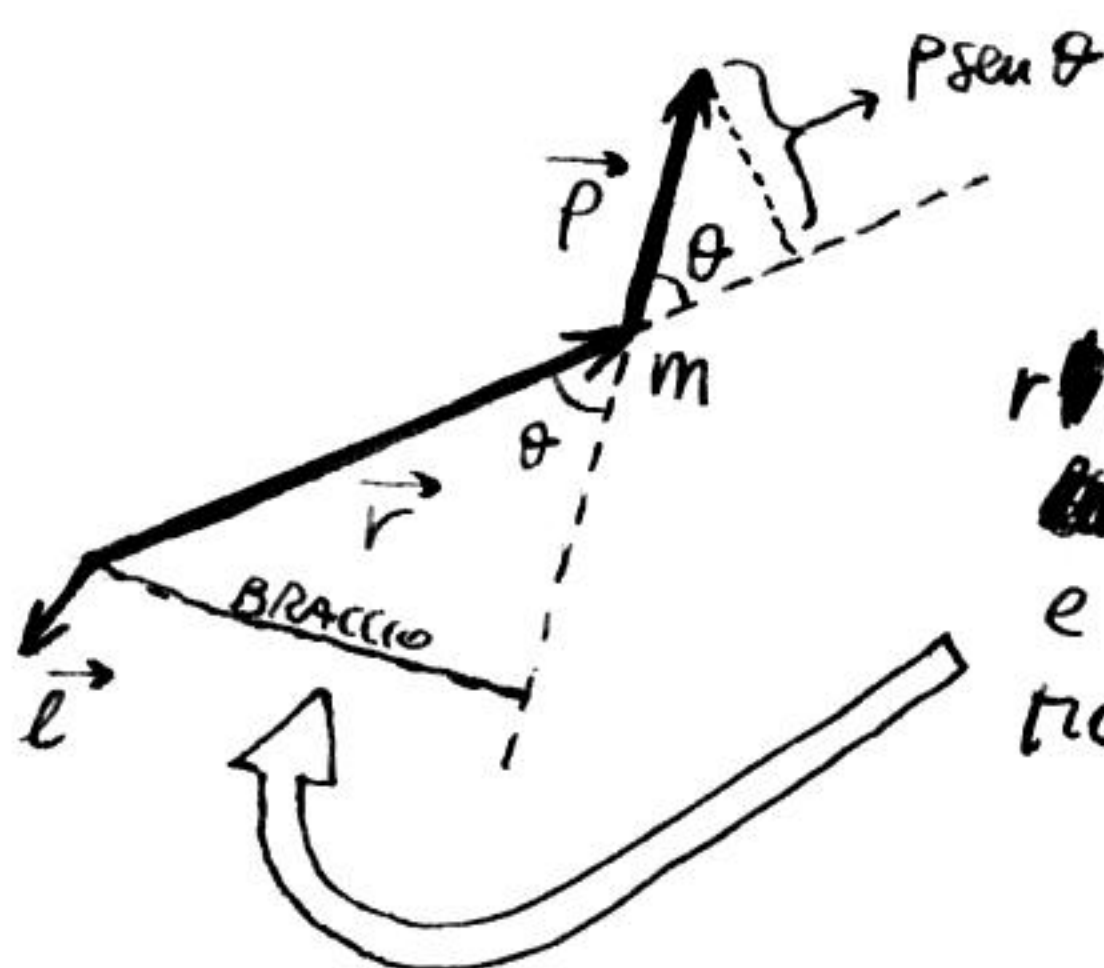
Il momento si misura in $N \cdot m$



La particella di massa m , in posizione $\vec{r}$ rispetto all'origine, ha quantità di moto $\vec{p}$; il momento angolare (che è l'analogo rotazionale della QM per moti lineari) è $\vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{p}$

MOMENTO ANGOLARE ~~perpendicolare~~ $\vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{p}$
o MOMENTO DELLA QM

il modulo di $\vec{l}$ è $l = r \cdot p \sin \theta$



$r \sin \theta$ è la componente di $\vec{r}$ ~~perpendicolare~~ perpendicolare a $\vec{p}$ e si chiama BRACCIO DEL MOMENTO

Formula del momento angolare

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

derivando rispetto al tempo, si ha

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

essendo $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ e $\vec{p} = m\vec{v}$, si ha

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\vec{v} \wedge m\vec{v} = 0$ perché i due vettori sono paralleli, perciò $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$

essendo $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, si ha $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{\tau}$

Quindi $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$, ovvero: la derivata rispetto al tempo del momento angolare di una particella è uguale al momento delle forze applicate a quella particella.

Tale formula è l'analogo rotazionale della $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$.

Il momento angolare totale di un sistema di più particelle è la somma vettoriale del momento angolare di ogni particella, calcolati rispetto allo stesso punto:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}$$

$$\vec{\tau}_{\text{est}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

la variazione rispetto al tempo del momento angolare totale di un sistema di particelle è uguale alla somma dei momenti esterni agenti sul sistema (i momenti interni si annullano a due a due).

In questa equazione, il momento angolare totale è calcolato rispetto all'origine di un sistema di riferimento inerziale; l'equazione continua a essere vera se il momento angolare totale è calcolato rispetto al CM del sistema.

Il punto rispetto al quale è calcolato il momento viene detto "polo".

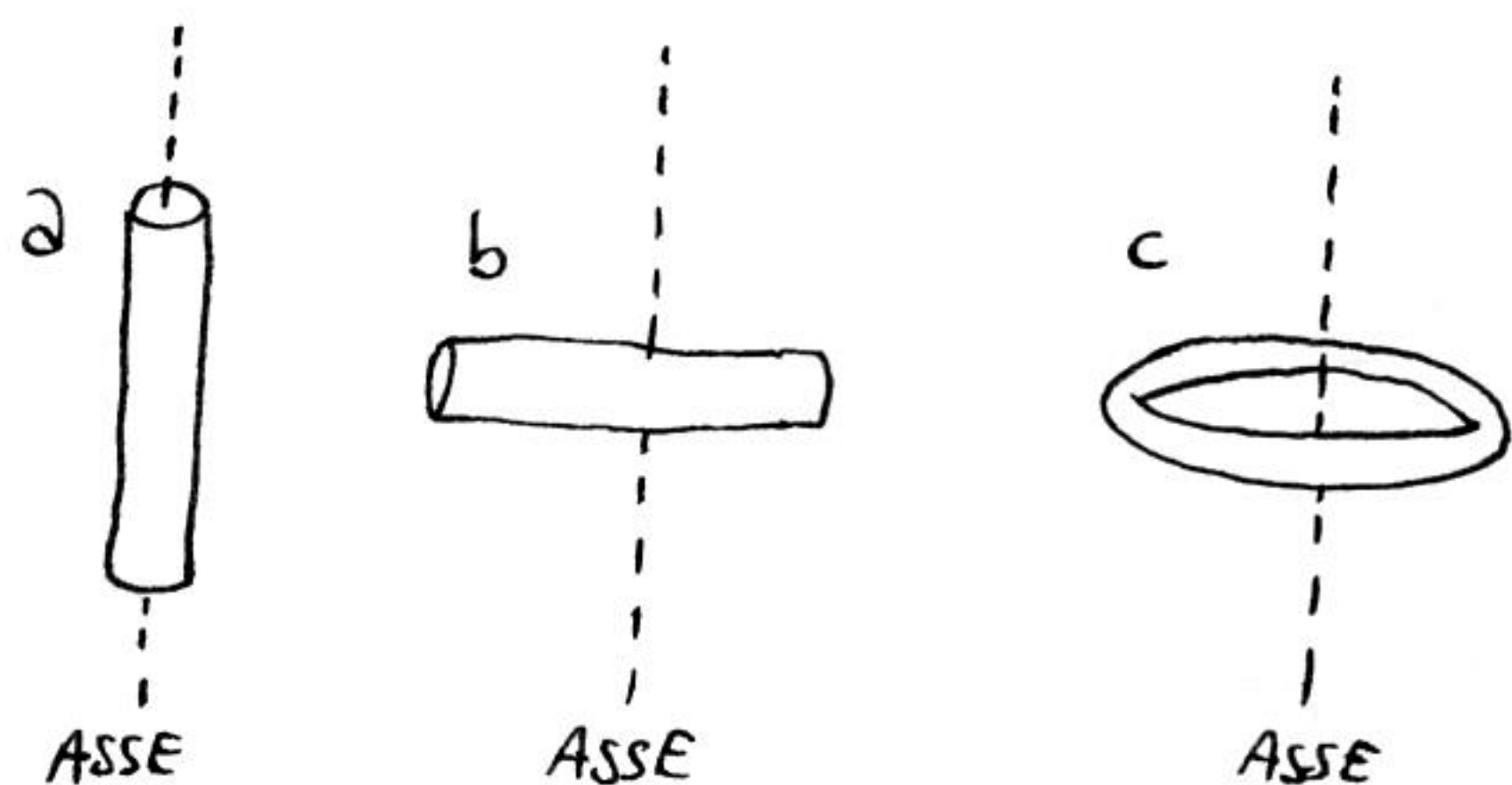
Consideriamo un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso con velocità angolare ω . Una particella m del corpo che si trova a una distanza r dall'asse possiede energia cinetica $K = \frac{1}{2} m v^2$, ovvero $K = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$. L'energia cinetica totale di tutte le particelle del corpo è allora $K = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2$.

Introduciamo il

MOMENTO D'INERZIA o INERZIA ROTAZIONALE $I = \sum m_i r_i^2$

Esso è una misura della resistenza offerta da un corpo a una variazione del suo stato di moto rotatorio attorno a un asse, ed è l'equivalente rotazionale della massa M , misura della resistenza offerta a una variazione dello stato di moto traslatorio.

Il momento d'inerzia di un corpo dipende dall'asse di rotazione, dalla massa e dalla distribuzione delle masse nel corpo.



$$M_a = M_b = M_c$$

$$I_a < I_b < I_c$$

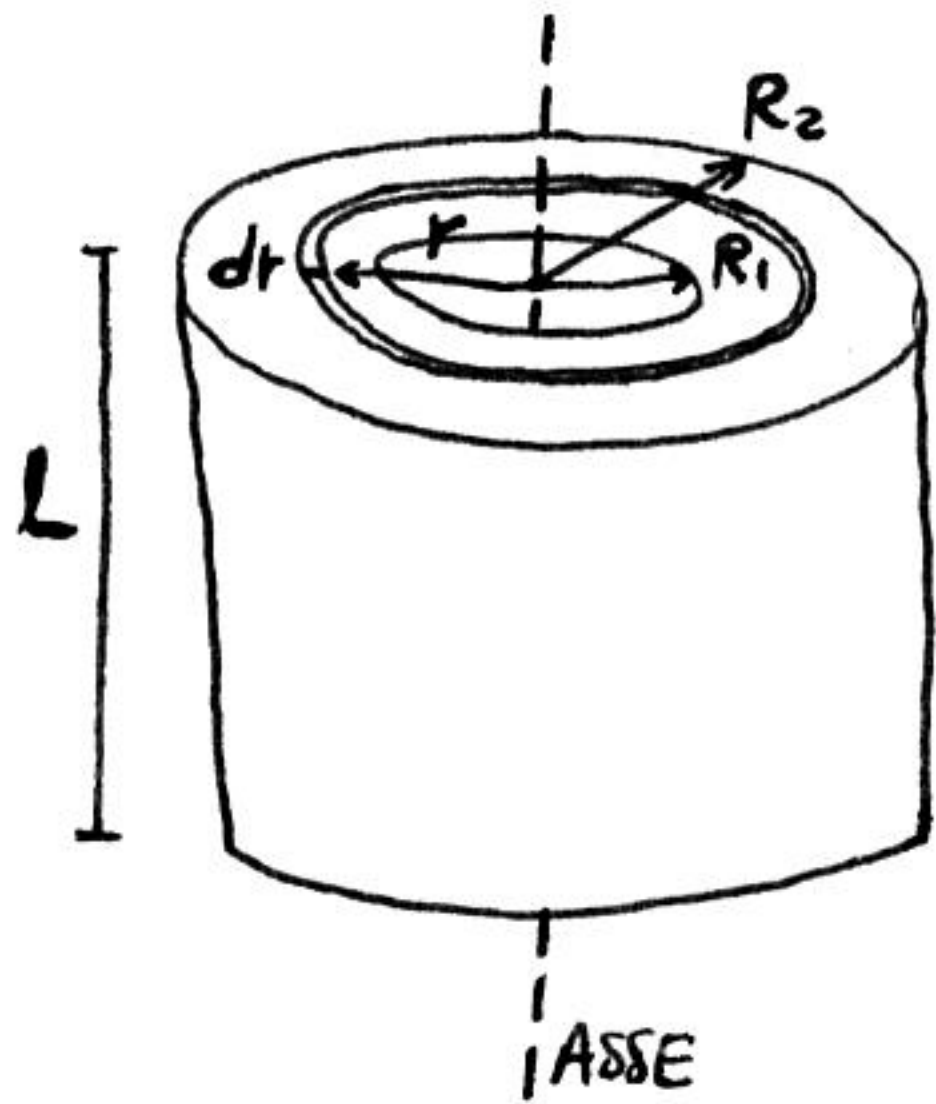
L'energia cinetica di un corpo in rotazione è allora $K = \frac{1}{2} I \omega^2$, analogo rotazionale della $K = \frac{1}{2} M v^2$.

MOMENTO D'INERZIA DI UN CORPO CONTINUO

Nel caso che il corpo sia una distribuzione continua di materia, si considerano infinitesime masse elementari dm aventi distanza r dall'asse: si ha $I = \int r^2 dm$.

ESEMPIO nel caso di un cilindro cavo di lunghezza L , raggio interno R_1 , raggio esterno R_2 e densità ρ (e quindi di spessore $R_2 - R_1$).

La massa elementare dm sarà una guaina di lunghezza L e spessore dr .



$$dV = 2\pi r dr \cdot L$$

$$dm = 2\pi r dr \cdot L \cdot \rho$$

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} r^3 2\pi dr L \rho = 2\pi L \rho \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi L \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} = \\ &= 2\pi L \rho \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} = R_2^2 - R_1^2 \pi L \rho \frac{R_2^2 + R_1^2}{2} = M \frac{R_2^2 + R_1^2}{2} \end{aligned}$$

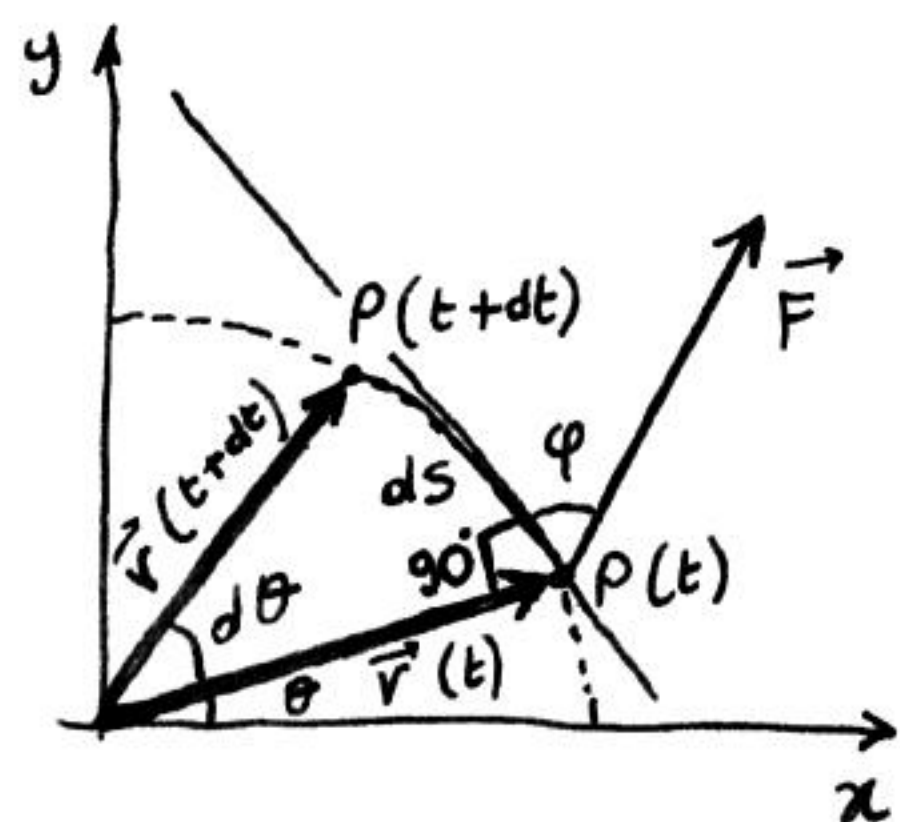
Relazione tra il momento d'inerzia I di un corpo rispetto a un asse qualunque e il momento d'inerzia I_{cm} dello stesso corpo rispetto a un asse passante per il CM del corpo e parallelo al primo asse e distante h da esso:

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

(TEOREMA DEGLI ASSI PARALLELI)

	anello	MR^2
	cilindro cavo	$M \frac{R_1^2 + R_2^2}{2}$
	cilindro pieno	$\frac{1}{2}MR^2$
	sfera piena	$\frac{2}{5}MR^2$
	crosta sferica	$\frac{2}{3}MR^2$

DINAMICA ROTAZIONALE DI UN CORPO RIGIDO



Consideriamo un determinato punto ~~qualsiasi~~ (punto P) del corpo rigido.

$$[W = \text{lavoro} \quad B = \text{potenza}]$$

In un tempo dt , il punto ~~qualsiasi~~ P ruota di un angolo $d\theta$ percorrendo un arco $ds = r \cdot d\theta$.

Il lavoro fatto dalla forza $\vec{F}$ è $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cos \varphi r d\theta$.

Essendo $F \cos \varphi \cdot r = \tau$, si ha $dW = \tau \cdot d\theta$, equivalente rotazionale di $dW = F \cdot s$.

Dividendo ora per il tempo trascorso, otteniamo la potenza:

$$\frac{dW}{dt} = \tau \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad \text{cioè} \quad B = \tau \cdot \omega, \text{ equivalente rotazionale di } B = F \cdot v.$$

Se il corpo è rigido, non vi è dissipazione di energia per moti interni e la rapidità con cui il lavoro viene compiuto è pari alla rapidità di aumento dell'energia cinetica: $\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right)$.

$$\text{Si ha } \frac{dW}{dt} = B = \tau \cdot \omega$$

$$\text{e si ha } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} (\omega^2) = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = I \omega \alpha$$

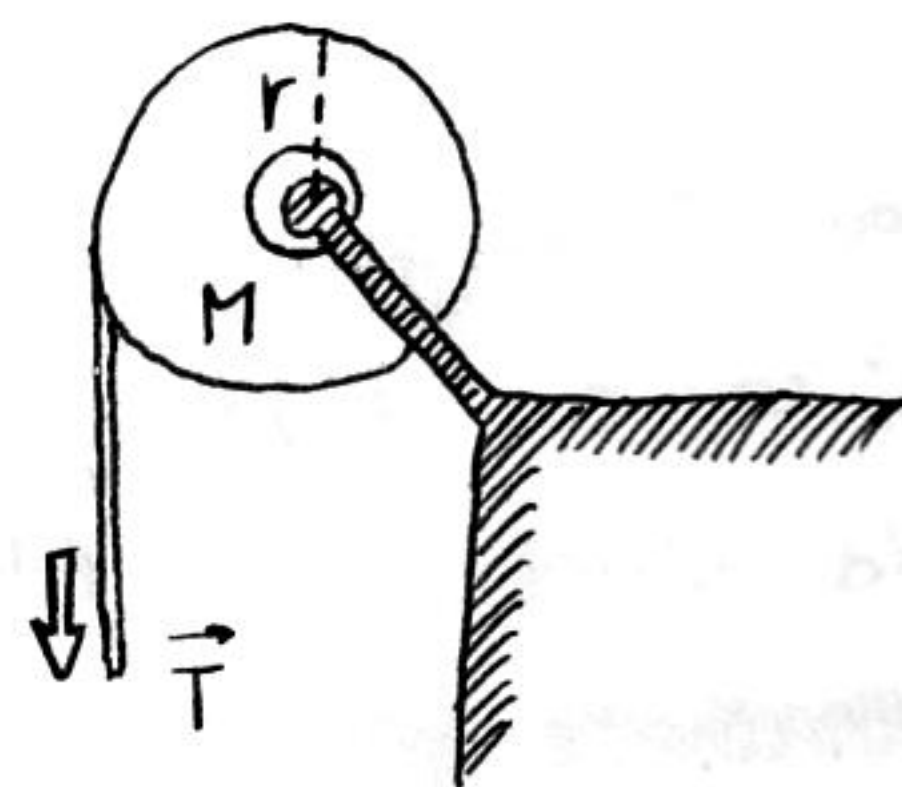
$$\text{per cui } \tau \omega = I \omega \alpha \quad \text{ossia} \quad \tau = I \alpha, \text{ equivalente rotazionale di } F = ma.$$

In generale, $\vec{\tau}$ non è parallelo all'asse di rotazione, per cui si considera il suo componente parallelo all'asse ~~il cui componente parallelo all'asse~~ che è quello che causa la rotazione del corpo (il componente normale all'asse, invece, tende a spostare il corpo dalla posizione fissa).

MOTO RETTILINEO

ROTAZIONE ATTORNO A UN ASSE FISSO

spostamento	x	spostamento angolare	θ
velocità	v	velocità angolare	ω
accelerazione	a	accelerazione angolare	α
massa	M	momento d'inertia	$I = \int r^2 dm$
forza	$F = Ma$	momento della forza	$\tau = I\alpha$
lavoro	$W = \int F dx$	lavoro	$W = \int \tau d\theta$
energia cinetica	$K = \frac{1}{2} Mv^2$	energia cinetica	$K = \frac{1}{2} I\omega^2$
potenza	$P = Fv$	potenza	$P = \tau\omega$
quantità di moto	$p = Mv$	momento della quantità di moto	$l = I\omega$



Un disco omogeneo di massa M e raggio r è montato su un perno sostenuto da supporti fissi e senza attrito. Una corda è avvolta sul bordo del disco e tirata con forza costante T verso il basso. Qual è l'accelerazione angolare del disco?

La componente del momento di $\vec{T}$ è $\tau = Tr$ e il momento d'inertia del disco è $I = \frac{1}{2} Mr^2$, entrambi rispetto all'asse di rotazione.

$$\tau = I\alpha \rightarrow Tr = \frac{1}{2} Mr^2 \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2T}{Mr}$$

Adesso un corpo di massa m viene appeso alla corda e lasciato cadere. Qual è ora l'accelerazione angolare del disco?

$$mg - T = ma$$

dove mg = forza peso del corpo, T = forza tensione della corda, ma = massa del corpo $\times$ la sua accelerazione verso il basso, che è uguale all'accelerazione tangenziale di un punto sul bordo del disco, perché la corda è inestensibile

mettendo a sistema questa relazione con la formula $Tr = \frac{1}{2} Mr^2 \alpha$ che avevamo già trovato, e ricordando che $a = \alpha r$, otteniamo

$$\alpha = \left(\frac{2m}{M+2m} \right) g \quad \text{mentre la tensione della corda è } T = \left(\frac{Mm}{M+2m} \right) g$$

Notare che il corpo cade con accelerazione $< g$ (gravità).

* Supponendo che il disco ~~del primo esempio~~ ~~deve essere portato~~ porta da fermo, calcolare il lavoro compiuto dal momento agente sul disco in un tempo t .

Il lavoro compiuto è dato da $W = \tau \cdot \Delta\theta$

dove si ha $\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2$

e $\tau = Tr$.

Perciò il lavoro è $W = \frac{1}{2} Tr \alpha t^2$.

Tale lavoro deve essere uguale all'aumento di energia cinetica del disco, ovvero ~~quadruplica~~

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} Mr^2 \cdot \alpha^2 t^2 = \frac{1}{4} Mr^2 \alpha^2 t^2.$$

* Dimostrare ~~che~~, nel secondo esempio, che l'energia meccanica si conserva.

La variazione di energia potenziale del corpo appeso è $\Delta U = mgy$ dove y = tratto verticale percorso dal corpo

e la variazione di energia cinetica del corpo e del disco è $\Delta K = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$ (entrambi partono da fermi)

Perciò sarà $mgy = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

$$mg \frac{V^2}{2a} = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} Mr^2 \frac{V^2}{r^2}$$

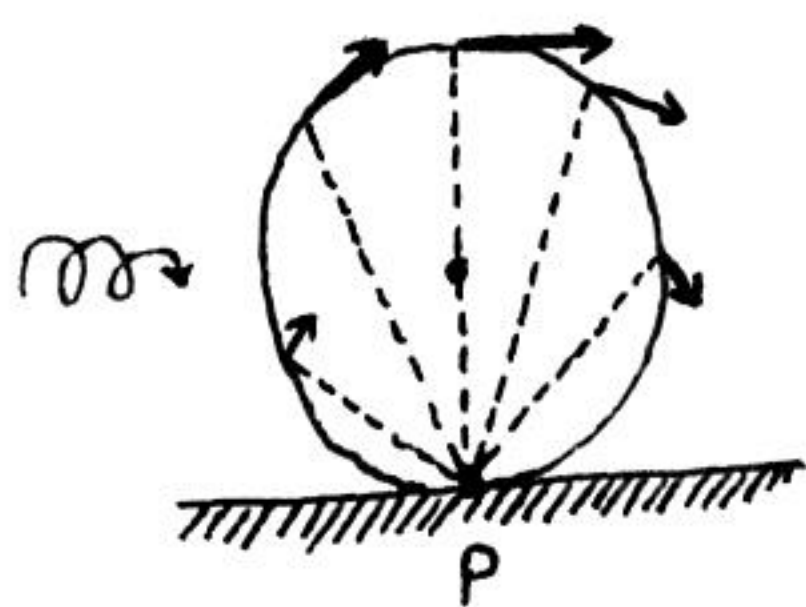
$$\frac{1}{2} mgV^2 \left(\frac{M+2m}{2m} \right) \frac{1}{g} = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{4} MV^2$$

$$\frac{1}{2} mV^2 \left(\frac{M+2m}{2m} \right) = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{4} MV^2$$

$$\frac{1}{4} V^2 (M+2m) = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{4} MV^2$$

$$\frac{1}{4} MV^2 + \frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{4} MV^2, \text{ come volevasi dimostrare.}$$

MOTO DI UN CORPO CHE ROTOLA (SIMULTANEAMENTE ROTATORIO E TRASLATORIO)



Cilindro che rotola su un piano, senza scivolare.

In ogni istante il fondo P del cilindro tocca il piano; per quel punto passa l'asse di istantanea rotazione. In ogni istante la velocità di ogni particella del cilindro è proporzionale alla distanza da P e diretta ortogonalmente a questa distanza. Cioè, in quell'istante il cilindro sta ruotando, attorno a un asse passante per P, con velocità angolare ω .

Possiamo allora scrivere la sua energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

dove I_P = momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse passante per P

Dal teorema degli assi paralleli si ha $I_P = I_{CM} + MR^2$.

$$\text{perciò } K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2.$$

Essendo $R\omega = V_{CM}$ = velocità del CM rispetto al punto fisso P, si ha

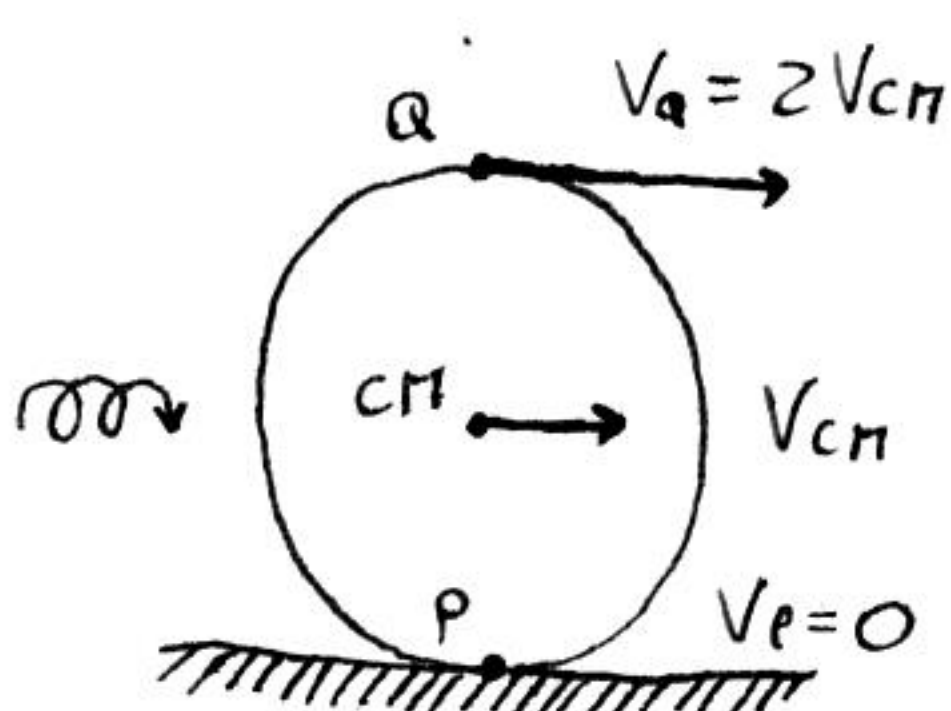
$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

Energia cinetica del cilindro se si muovesse solo di moto traslatorio, con la velocità del suo CM

Energia cinetica del cilindro se ruotasse, senza traslare, attorno a un asse passante per il suo CM

Quindi:

L'effetto di una traslazione del CM più una rotazione attorno a un asse passante per il CM, è equivalente a una rotazione con la stessa velocità angolare attorno a un asse passante per il punto di contatto del corpo che rotola, con il piano.



MOTO DEI PUNTI DI UN CORPO CHE ROTOLA

Un cilindro pieno di massa M e raggio R rotola su un piano inclinato dall'altezza h senza scivolare. Trovare la velocità del suo CM quando arriva in fondo.

1) METODO ENERGETICO (PIU' SEMPLICE)

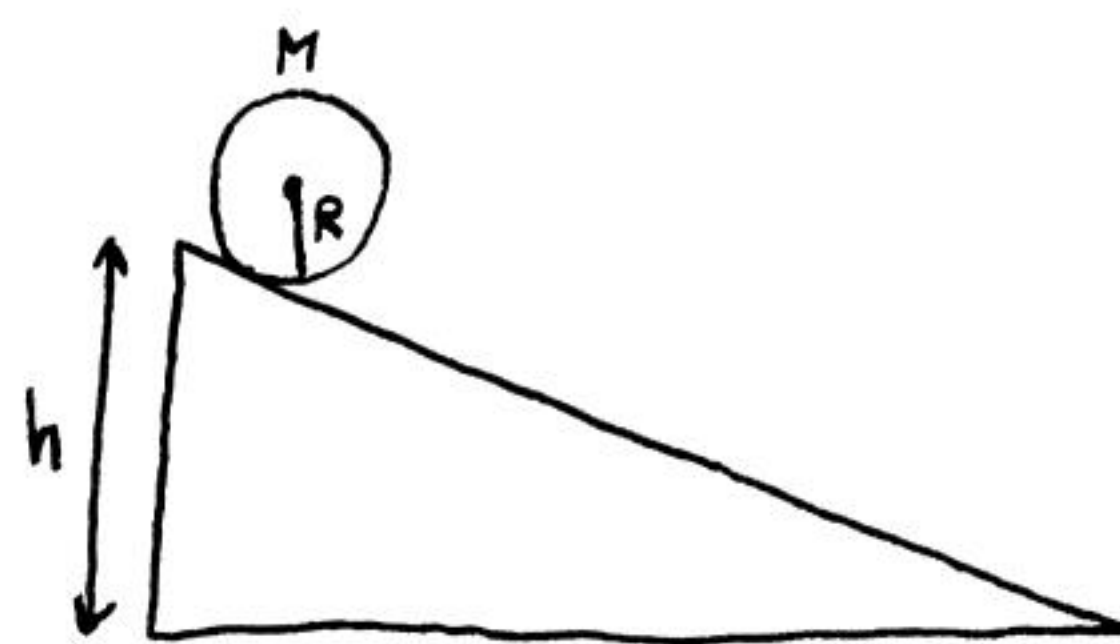
$$\Delta U = Mgh$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

perciò $Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$

essendo $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$ e $\omega = \frac{v}{R}$, si ha

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MR^2 \frac{v^2}{R^2} \quad \text{da cui} \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{4}{3} gh}}$$

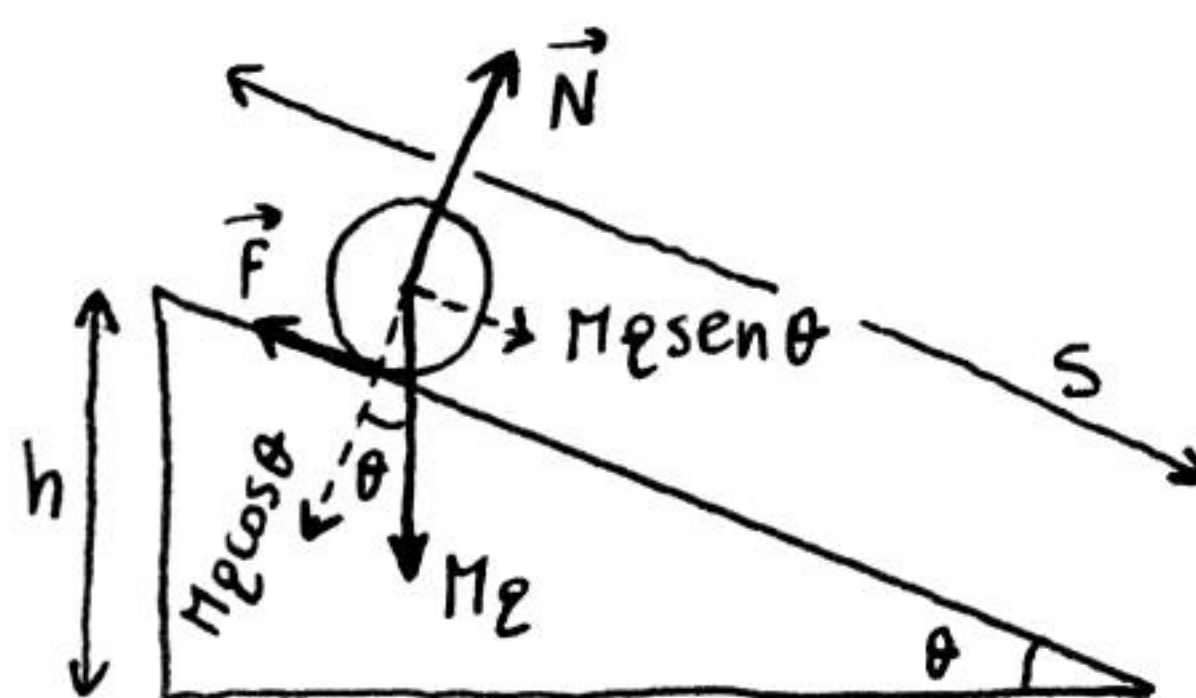


La velocità sarebbe stata $v = \sqrt{2gh}$ se il cilindro avesse scivolato senza rotolare lungo il piano inclinato; se il cilindro rotola, la velocità finale è minore perché parte dell'energia potenziale si trasforma in energia cinetica di rotazione.

Perché il cilindro possa rotolare, devono essere presenti delle forze di attrito.

2) METODO DINAMICO

La forza con la quale il cilindro rotola lungo il piano inclinato è



$\vec{F}$ = forza attrito

$Ma = Mg \sin \theta - F$, parallelamente al piano inclinato. Abbiamo anche $Mg \cos \theta - N = 0$, perpendicolarmente al piano inclinato, ma questo non ci interessa.

Il moto di rotazione attorno al CM si ottiene da $\tau = I_{CM} \alpha$

dove $\tau = FR$ (e l'attrito che fa muovere il cilindro), $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$ e $\alpha = \frac{a}{R}$

perciò $FR = \frac{1}{2} MR^2 \frac{a}{R} \rightarrow F = \frac{1}{2} Ma$.

Sostituendo nell'equazione dei componenti paralleli al piano, si ha $Ma = Mg \sin \theta - \frac{1}{2} Ma$ da cui otteniamo l'accelerazione ^{del CM} del cilindro lungo il piano inclinato: $a = \frac{2}{3} g \sin \theta$.

Ricaviamo la velocità finale dall'equazione $v = \sqrt{2as}$

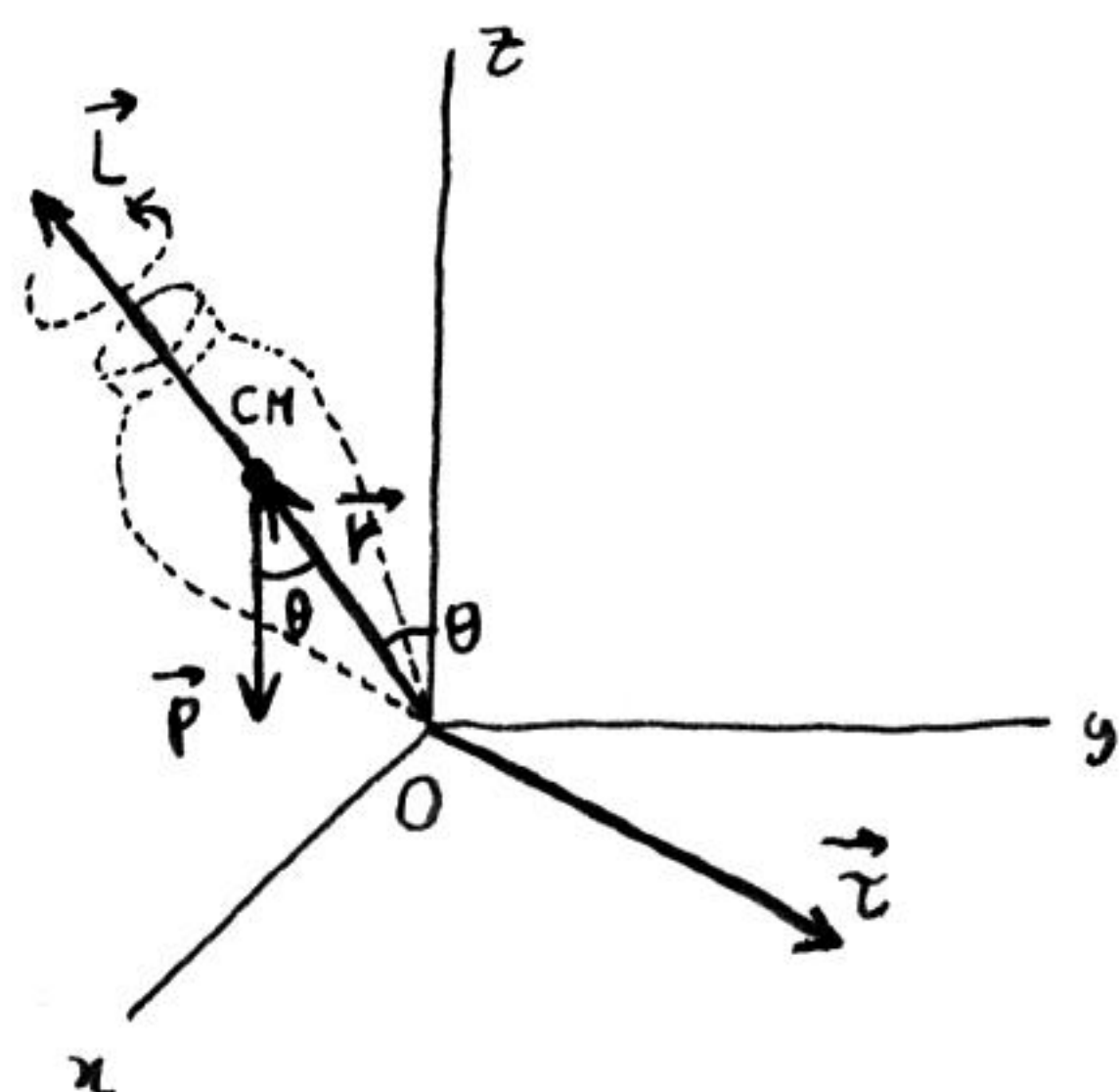
dove $s = \frac{h}{\sin \theta}$

ovvero $v = \sqrt{2 \cdot \frac{2}{3} g \sin \theta \cdot \frac{h}{\sin \theta}} = \boxed{\sqrt{\frac{4}{3} gh}}$.

La minima forza d'attrito perché il cilindro possa rotolare è $F = \frac{1}{2} Ma = \frac{1}{3} Mg \sin \theta$.

13 DINAMICA ROTAZIONALE II

Consideriamo una trottola in rotazione attorno al suo asse di simmetria e con l'estremo fisso nell'origine di un sistema di riferimento inerziale; l'asse di simmetria della trottola ruota attorno all'asse verticale descrivendo un cono (moto di PRECESSIONE).

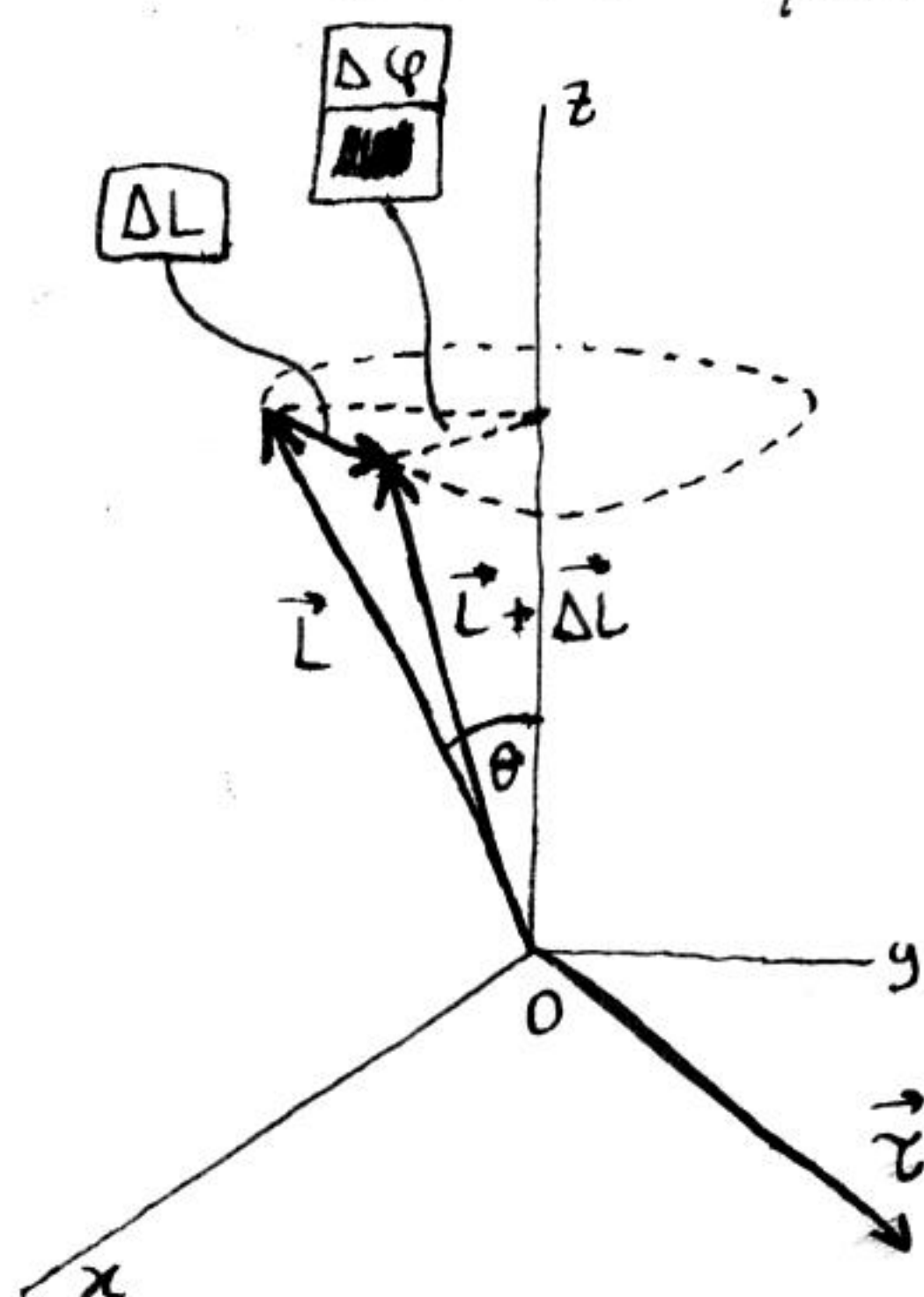


La trottola ha velocità angolare $\vec{\omega}$ e momento di QT $\vec{L}$, rispetto all'asse della trottola.

[Nota: $\vec{\omega}$ è sempre orientato lungo l'asse di rotazione fisso di un corpo in rotazione; $\vec{L}$ lo è solo se l'asse di rotazione coincide con l'asse di simmetria del corpo. Per questa trottola, possiamo supporre $\vec{\omega}$ e $\vec{L}$ coassiali. Se supponiamo il moto di precessione molto lento rispetto alla velocità angolare della trottola, cioè l'asse di rotazione è approssimativamente fisso.]

Sulla trottola agisce una forza verso l'alto dovuta al perno in O, che passa per O; il suo momento rispetto a tale punto è nullo, perché è nullo il braccio della forza.

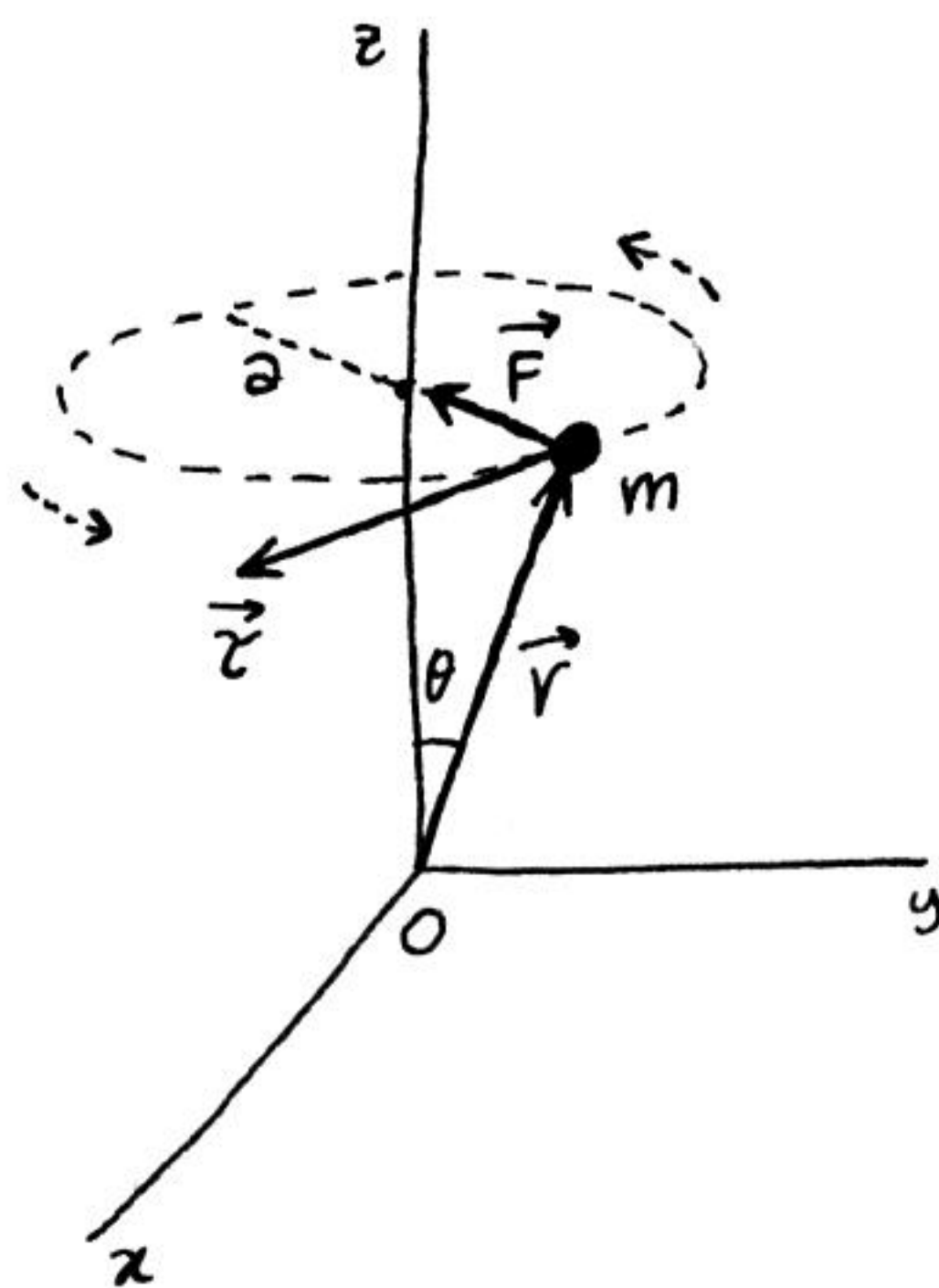
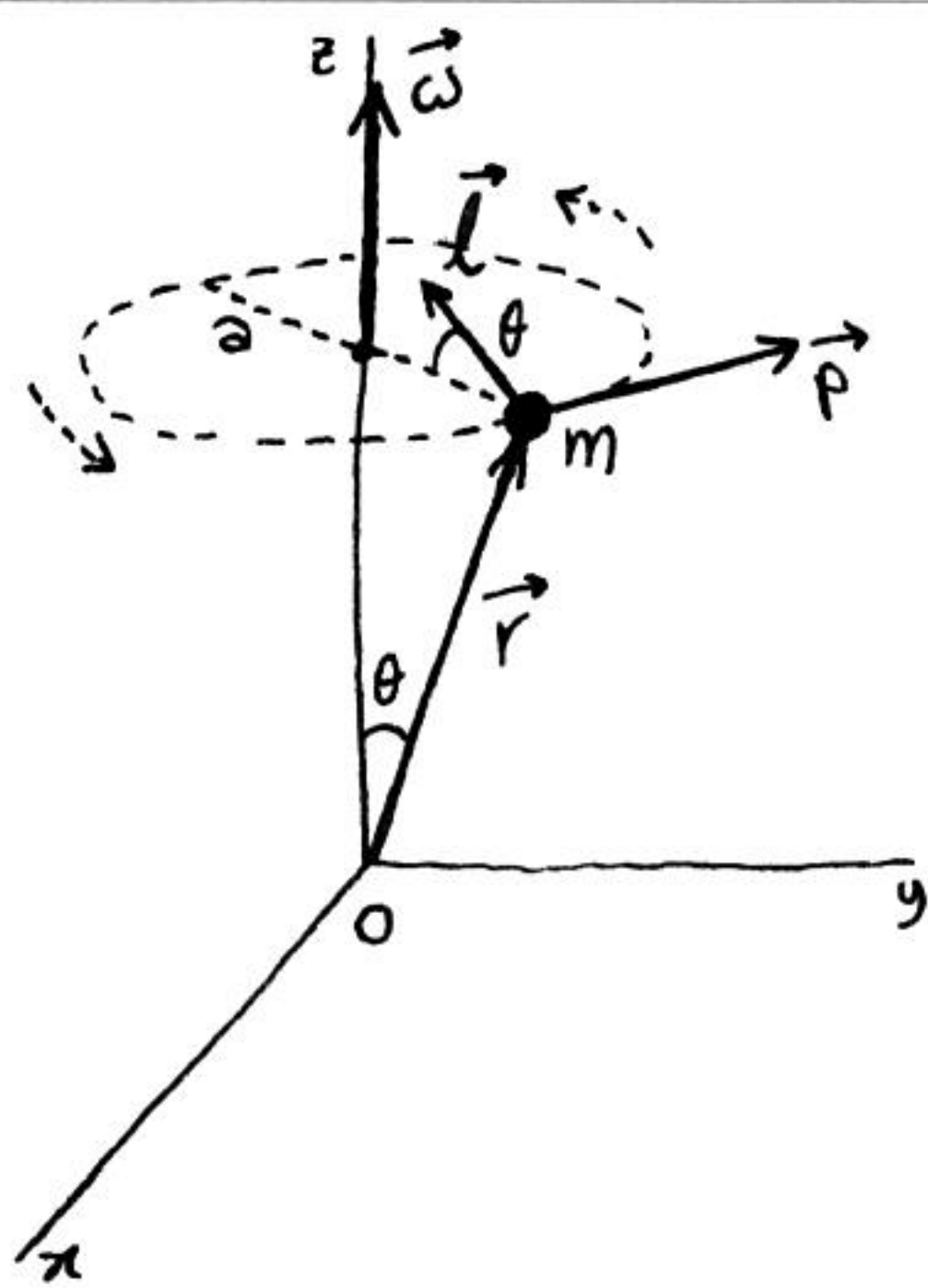
L'altra forza che agisce sulla trottola è la forza peso $\vec{P}$ verso il basso, applicata nel CM e che ha un momento $\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{P} = r \cdot m g \sin \theta$. [Essendo un prodotto vettoriale, $\vec{\tau}$ è perpendicolare a $\vec{r}$, e quindi a $\vec{L}$, che è approssimativamente coassiale a $\vec{r}$].



Quando su un corpo rigido agisce un momento meccanico, si ha una variazione del momento della QT secondo la relazione $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$. Tale variazione $d\vec{L}$ ha la stessa direzione di $\vec{\tau}$. Essa è quindi perpendicolare a $\vec{L}$ e piccola in confronto a esso, così possiamo dire che $\vec{L}$ cambia in direzione ma non in modulo.

Se Δt è piccolo, si ha $\Delta \vec{L} = \vec{\tau} \Delta t$, da cui $\Delta t = \frac{\Delta L}{\tau} = \frac{\Delta L}{r m g \sin \theta}$.
La velocità angolare di precessione è $\omega_p = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$. Si ha $\Delta \varphi \approx \frac{\Delta L}{L \sin \theta}$.
Perché $\omega_p = \frac{\Delta L}{L \sin \theta} \cdot \frac{r m g \sin \theta}{\Delta L} = \frac{m g r}{L}$.

[Nota: $\tau = \omega_p L \sin \theta$ cioè $\vec{\tau} = \vec{\omega}_p \wedge \vec{L}$]



massa puntiforme m
che si muove lungo un
cerchio di raggio a attorno
all'asse z

(i due disegni rappresentano
la medesima situazione)

$$\vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m \vec{v}$$

$\vec{l}$ non è parallelo a $\vec{\omega}$; lo sarebbe se avessimo scelto l'origine O nel piano della
massa orbitante.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Notiamo che è

$$l = r p \sin 90^\circ = r p = r \cdot m v = r \cdot m \cdot \omega a = r \cdot m \cdot \omega r \sin \theta = m \omega r^2 \sin \theta$$

La componente di l parallela a z è

$$l_z = l \sin \theta = m \omega r^2 \sin \theta \cdot \sin \theta = m \omega (r \sin \theta)^2 = m \omega a^2 = I \omega$$

Abbiamo perciò trovato la relazione $\vec{l}_z = I \vec{\omega}$, analoga rotazionale della $\vec{p} = m \vec{v}$

(Non è valida la $\vec{l} = I \vec{\omega}$ perché $\vec{l}$ e $\vec{\omega}$ non sono paralleli)



GIROSCOPIO

(per il principio di conservazione del
momento angolare, l'asse principale
del disco più interno rimane fisso nello
spazio, anche quando si muove il
giroscopio)

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\vec{\tau}_{est} = \frac{d\vec{L}}{dt} ; \quad \text{se } \vec{\tau} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{costante}, \text{ cioè se il momento risultante}$$

delle forze esterne agenti sul sistema è nullo, allora il momento angolare (o momento della qm) del sistema rimane costante, come già visto.

Adesso, $\vec{L} = I\omega$; se un corpo muta il proprio momento d'inerzia, allora anche la sua velocità angolare muta in modo che ~~il momento angolare non muti~~ il momento angolare non muti.

$I\omega = I_0\omega_0 = \text{costante}$ (principio di conservazione del momento angolare); tale equazione è valida per rotazioni attorno ad assi fissi e attorno ad assi passanti per il centro traslano rimanendo sempre paralleli a se stessi.

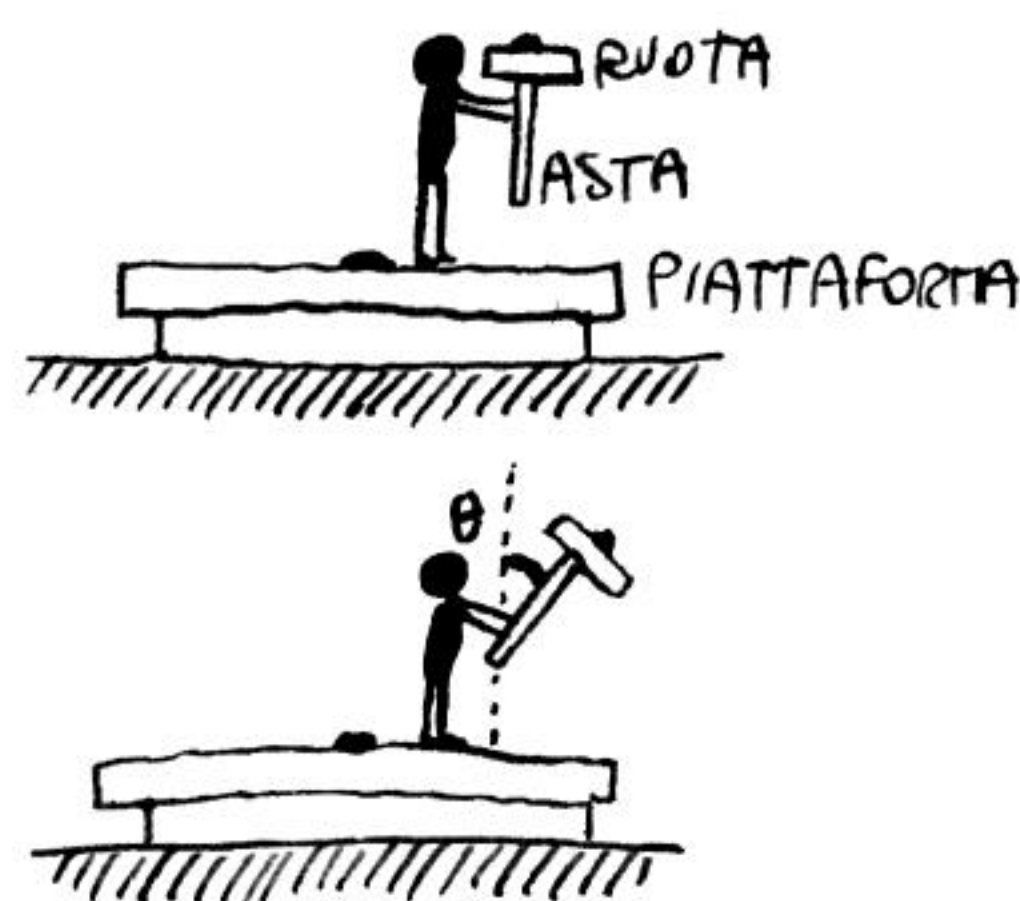
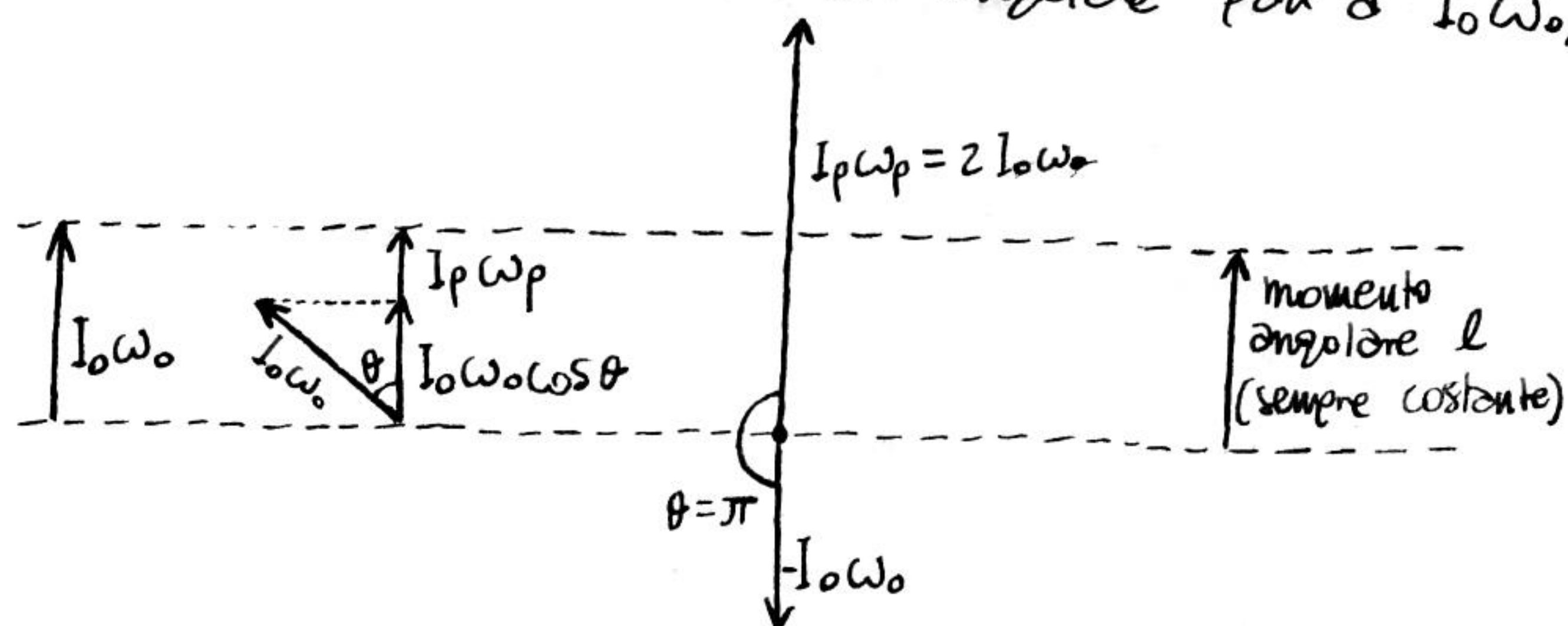
(Es. un pattinatore può triplicare la sua velocità angolare di rotazione, raccogliendo le braccia attorno al corpo in modo da ridurre a $1/3$ il suo momento d'inerzia $I = \int r^2 dm$).

Se un corpo ha momento d'inerzia I_1 e velocità angolare ω_1 , può raggiungere una velocità angolare $\omega_2 > \omega_1$ modificando il suo momento d'inerzia in $I_2 < I_1$.

La sua energia cinetica di rotazione era $\frac{1}{2}I_1\omega_1^2$ prima e $\frac{1}{2}I_2\omega_2^2$ dopo, con $\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 < \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$: la sua energia cinetica è quindi aumentata. Tale aumento di energia è dato dal lavoro compiuto dal corpo nel modificare il suo momento d'inerzia (Es. contraendo le braccia).

Un uomo sta in piedi su una piattaforma girevole ferma, e tiene in mano un'asta verticale alla sommità della quale è montata una ruota girevole attorno a tale asta; tale ruota sta ruotando con una determinata velocità angolare ω_0 . Cosa succede se l'uomo muove l'asta in modo che essa formi un angolo θ con la verticale?

Sul sistema non agiscono forze esterne, perciò il momento angolare deve conservarsi. Il sistema ha all'inizio una componente verticale del momento angolare pari a $I_0\omega_0$,

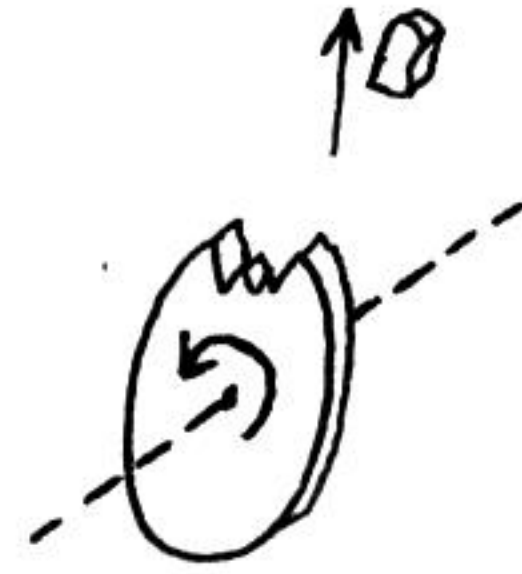


dove I_0 è il momento d'inerzia della ruota e ω_0 la sua velocità angolare, e tale vettore del momento angolare è diretto verticalmente verso l'alto. Quando l'uomo muove l'asta di un angolo θ , il componente verticale del momento angolare diventa pari a $I_0 \omega_0 \cos \theta$; la piattaforma (che ha momento d'inerzia I_p) si mette a muovere a una velocità angolare ω_p , in modo da far rimanere costante il momento angolare totale del sistema; la piattaforma contribuisce con un momento angolare pari a $I_p \omega_p$, in modo che sia $I_0 \omega_0 \cos \theta + I_p \omega_p = I_0 \omega_0$.

Se l'uomo muove l'asta di un angolo π (cioè capovolge l'asta) il momento angolare della ruota diventa $-I_0 \omega_0$; la piattaforma si mette a muovere così a una velocità angolare ω_p , in modo che sia $I_p \omega_p - I_0 \omega_0 = I_0 \omega_0$; cioè si avrà $I_p \omega_p = 2 I_0 \omega_0$.

RASSEGNA DELLE EQUAZIONI DEL MOTO ROTATORIO	
$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$	EQUAZIONI DI DEFINIZIONE: MOMENTO MECCANICO AGENTE SU UNA PARTICELLA, RISPETTO A UN PUNTO O, DOVUTO A UNA FORZA F
$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$	MOMENTO ANGOLARE DI UNA PARTICELLA, RISPETTO A UN PUNTO O, CHE HA UNA QUANTITÀ DI MOTO p
$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	RELAZIONE GENERALE PER UNA PARTICELLA SOTTOPOSTA A UN MOMENTO MECCANICO τ
$\tau = I \alpha$ $L = I \omega$	CASO PARTICOLARE DI UN CORPO RIGIDO IN ROTAZIONE ATTORNO A UN ASSE FISSO IN UN SISTEMA INERZIALE

Un disco piatto uniforme di massa M e raggio R ruota attorno a un asse orizzontale, passante per il suo centro, con velocità angolare ω .



Qual è la sua energia cinetica?

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{4} M R^2 \omega^2$$

E il suo momento angolare?

$$L = I \omega = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \omega$$

Una scheggia di massa m si stacca dal bordo del disco in un punto che in quell'istante ha velocità diretta verso l'alto, verticalmente. A che altezza sale la scheggia prima di ricadere?

$$v = \sqrt{2gh} \rightarrow R\omega = \sqrt{2gh} \rightarrow h = \frac{R^2 \omega^2}{2g}$$

Qual è la velocità angolare finale del disco scheggiato?

Applicando il principio di conservazione del momento della QM, $L_{\text{iniziale}} = L_{\text{finale}}$, si ha

$$I \omega = I_f \omega_f + \vec{r} \wedge \vec{p} \quad [\text{dove } \vec{r} \wedge \vec{p} \text{ è il momento della QM della scheggia}]$$

$$\frac{1}{2} M R^2 \omega = \left(\frac{1}{2} M R^2 - m R^2 \right) \omega_f + R m v$$

[il momento d'inerzia del disco scheggiato è quello del disco intero, meno quello della scheggia posta a distanza R di massa m]

$$\frac{1}{2} M R^2 \omega = \left(\frac{1}{2} M R^2 - m R^2 \right) \omega_f + R m R \omega$$

$$\frac{1}{2} M R^2 \omega - m R^2 \omega = \left(\frac{1}{2} M R^2 - m R^2 \right) \omega_f$$

$$\omega_f = \omega \quad \text{Perciò la velocità angolare del disco non varia.}$$

Qual è l'energia cinetica del disco scheggiato?

$$K_f = \frac{1}{2} I_f \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2 - m R^2 \right) \omega^2 = \omega^2 R^2 \left(\frac{1}{4} M - \frac{1}{2} m \right)$$

E qual è il momento angolare del disco scheggiato?

$$L_f = I_f \omega = \left(\frac{1}{2} M R^2 - m R^2 \right) \omega = \omega R^2 \left(\frac{1}{2} M - m \right)$$

Una ragazza di massa M è ferma sul bordo di una giostra senza attutiti di massa $10M$, raggio R e momento d'inerzia I , in quiete. Se la ragazza lancia un sasso di massa m in direzione orizzontale tangente al bordo esterno della giostra, e la velocità del sasso rispetto al suolo è V , calcolare la velocità angolare della giostra e la velocità lineare della ragazza, una volta lanciato il sasso.

Per il principio della conservazione della QM, la ragazza, lanciando il sasso di $QM = mV$, acquista una QM pari a MV_R , dove V_R è la velocità lineare della ragazza ed ha stessa direzione e verso opposto a V , velocità del sasso; si ha $mV = MV_R$. Abbiamo perciò un momento angolare $\vec{r} \wedge \vec{p}$, dove $\vec{r}$ = distanza del punto di applicazione dall'origine = distanza ragazza/centro giostra = R , e $\vec{p} = mV = MV_R$. Per il principio della conservazione del momento della QM, il momento angolare generato dal lancio del sasso si traduce in un movimento rotatorio della giostra; per un corpo rigido in rotazione attorno a un asse fisso in un sistema inerziale, tale momento può essere espresso con $L = I\omega$. Si ha perciò $\vec{r} \wedge \vec{p} = I\omega$; l'incognita è ω . Notare che nella valutazione del momento d'inerzia totale, dobbiamo sommare al momento d'inerzia I della giostra anche quello della ragazza, che si trova fissa sulla giostra; la ragazza ha massa M e si trova sul bordo della giostra, perciò dista R dal suo centro, che coincide con l'asse di rotazione; il momento d'inerzia della ragazza, rispetto all'asse di rotazione della giostra, è perciò MR^2 . Dalla $\vec{r} \wedge \vec{p} = I\omega$, si ha:

$$RmV = (I + MR^2)\omega_* \quad \rightarrow \quad \omega_* = \frac{RmV}{I + MR^2} = \frac{RmV}{\frac{1}{2} \cdot 10MR^2 + MR^2} = \frac{mV}{6MR}$$

e la velocità lineare della ragazza sulla giostra (che NON È V_R) sarà:

$$V_* = \omega_* R \quad \rightarrow \quad V_* = \frac{mV}{6M}$$

14 EQUILIBRIO DEI CORPI RIGIDI

- Un corpo rigido, in un sistema di riferimento inerziale, è in EQUILIBRIO MECCANICO se:
- 1) l'accelerazione lineare $\vec{a}$ del suo CM è nulla; 1ª CONDIZIONE
 - 2) l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$, rispetto a un qualunque asse fisso, è nulla. 2ª CONDIZIONE

(Non è necessario che sia $\vec{v}=0, \vec{\omega}=0$; se lo è, si parla di EQUILIBRIO STATICO)

1) Poiché $\vec{F}_{\text{est}} = m \vec{a}_{\text{CM}}$, per $\vec{a}_{\text{CM}} = 0 \rightarrow \vec{F}_{\text{est}} = 0$; $\sum \vec{F} = 0$ 1ª CONDIZIONE

2) Poiché $\vec{\tau} = I \vec{\alpha}$, per $\vec{\alpha} = 0 \rightarrow \vec{\tau} = 0$; $\sum \vec{\tau} = 0$ 2ª CONDIZIONE

In questa 2ª condizione, le componenti scalari di $\vec{\tau}$ ~~rispetto~~ sui tre assi x, y, z sono definite (e la loro somma viene definita nulla) rispetto all'origine O , che è il polo rispetto al quale è definito il momento meccanico $\vec{\tau}$ (che viene definito nulla).

"Per un corpo in equilibrio ^{traslazionale} ~~traslazionale~~, se il momento $\vec{\tau}_O$ è nulla rispetto a un polo O , allora è nulla per qualsiasi altro polo".

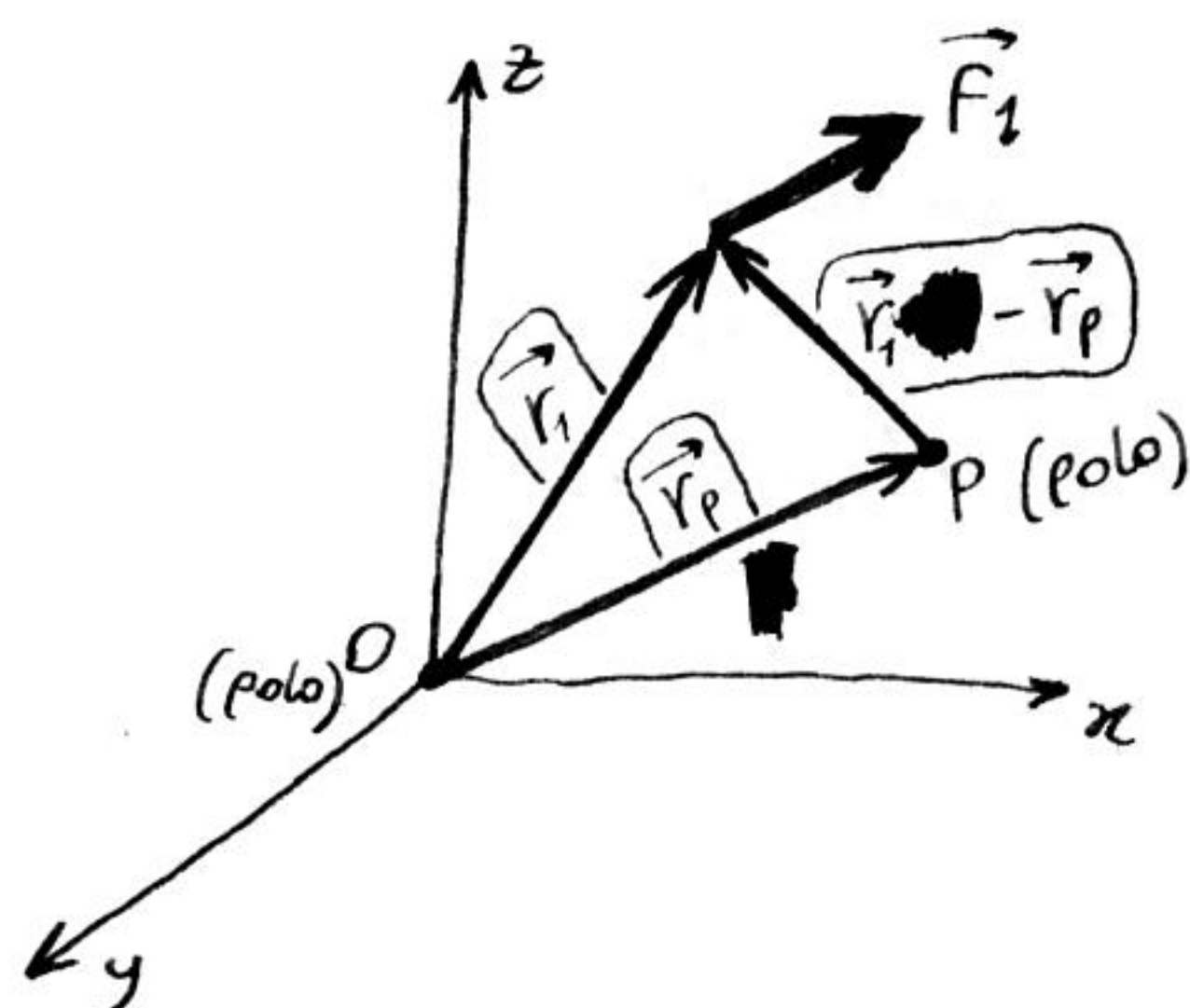
Dimostrazione: sul corpo agiscono n forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (in figura è mostrata solo $\vec{F}_1$). Il momento meccanico rispetto a O è

$$\tau_O = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge \vec{F}_3 + \dots + \vec{r}_n \wedge \vec{F}_n$$

Il momento meccanico rispetto a un qualsiasi punto P è invece

$$\begin{aligned} \tau_P &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_P) \wedge \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_P) \wedge \vec{F}_2 + (\vec{r}_3 - \vec{r}_P) \wedge \vec{F}_3 + \dots + (\vec{r}_n - \vec{r}_P) \wedge \vec{F}_n = \\ &= \underbrace{[\vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge \vec{F}_3 + \dots + \vec{r}_n \wedge \vec{F}_n]}_{\text{questo è } \tau_O} - \underbrace{[\vec{r}_P \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n)]}_{\text{questo è nulla perché è nulla la somma di forze}} \end{aligned}$$

Perciò $\tau_P = \tau_O$, e poiché $\tau_O = 0 \rightarrow \tau_P = 0$.



La forza di gravità nel caso di un corpo esteso non è una singola forza, ma è la risultante di tutte le forze agenti su ~~ogni~~ ogni particella del corpo in questione. Si può dimostrare che, se consideriamo uniforme il campo gravitazionale terrestre, tutte le forze peso che agiscono su tutte le particelle del corpo sono equivalenti a un'unica forza Mg applicata nel CM del corpo (ovvero, che il corpo rimane in equilibrio se una forza $F = -Mg$ viene applicata nel suo CM).

"Una forza $\vec{F} = -M\vec{g}$ è applicata in un punto O di un corpo di massa M . Il corpo è in equilibrio se e solo se il punto O è il suo CM."

Dimostrazione:

La 1ª condizione di equilibrio ($\vec{F} = 0$) è già stata soddisfatta dalla

$$\vec{F} = m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g} + m_3 \vec{g} + \dots + m_n \vec{g} - M \vec{g} = 0.$$

Per la 2ª condizione di equilibrio ($\vec{\tau} = 0$) scegliamo O come polo:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \wedge m_1 \vec{g} + \vec{r}_2 \wedge m_2 \vec{g} + \vec{r}_3 \wedge m_3 \vec{g} + \dots + \vec{r}_n \wedge m_n \vec{g} =$$

$$= m_1 \vec{r}_1 \wedge \vec{g} + m_2 \vec{r}_2 \wedge \vec{g} + m_3 \vec{r}_3 \wedge \vec{g} + \dots + m_n \vec{r}_n \wedge \vec{g} =$$

$$= (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots + m_n \vec{r}_n) \wedge \vec{g} =$$

$$= \sum_i (m_i \vec{r}_i) \wedge \vec{g}$$

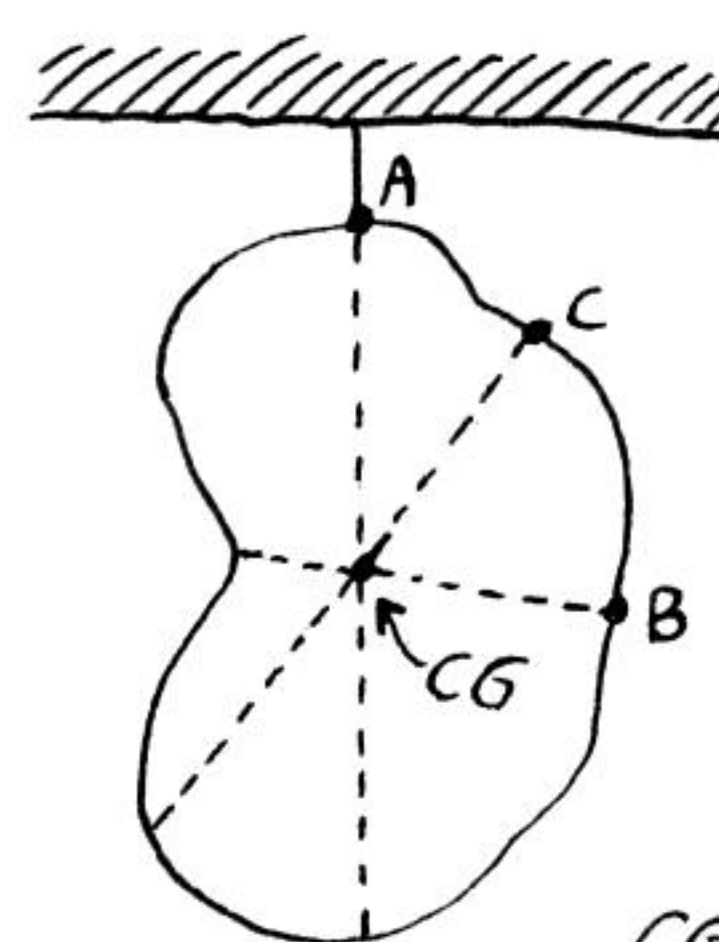
(momento delle forze gravitazionali applicate a tutte le masse elementari $m_1, m_2, \dots, m_n$)

$\sum_i (m_i \vec{r}_i)$ ci dà, per definizione, le coordinate del CM del corpo (il vettore $\vec{r}_{CM}$); se il punto O era il CM del corpo, tale somma è nulla, $\vec{\tau}$ è nullo e il corpo è in equilibrio, C.V.D.

Questo punto di applicazione della forza gravitazionale equivalente risultante è il CENTRO DI GRAVITÀ o BARICENTRO; esso coincide col CM se ipotizziamo che il campo gravitazionale terrestre sia uniforme.

Appendendo un oggetto, esso si dispone in modo che il centro di gravità si trovi sulla verticale del punto di sospensione, affinché il momento risultante delle forze di peso e corda si annullino.

Sospendendolo più volte, si può trovare sperimentalmente il centro di gravità dall'intersezione delle linee verticali.



CG = CENTRO DI GRAVITÀ

Procedimento per la risoluzione di problemi sull'equilibrio statico:

- 1) Tracciare un confine ~~alla~~ immaginario attorno al sistema (isolamento del sistema);
- 2) Disegnare i vettori delle forze esterne (che agiscono dall'esterno del confine), le forze interne si annullano a due a due;
- 3) Scegliere un conveniente sistema di assi coordinati per la scomposizione delle forze (per la 1ª condizione dell'equilibrio);
- 4) Scegliere un conveniente sistema di assi coordinati per la scomposizione dei momenti delle forze (per la 2ª condizione dell'equilibrio), tale sistema può anche non essere lo stesso del caso precedente.

Nel caso tridimensionale, abbiamo 6 equazioni:

3 per le componenti scalari delle forze, 3 per le componenti dei momenti lungo i tre assi.

Nel caso bidimensionale, abbiamo 3 equazioni:

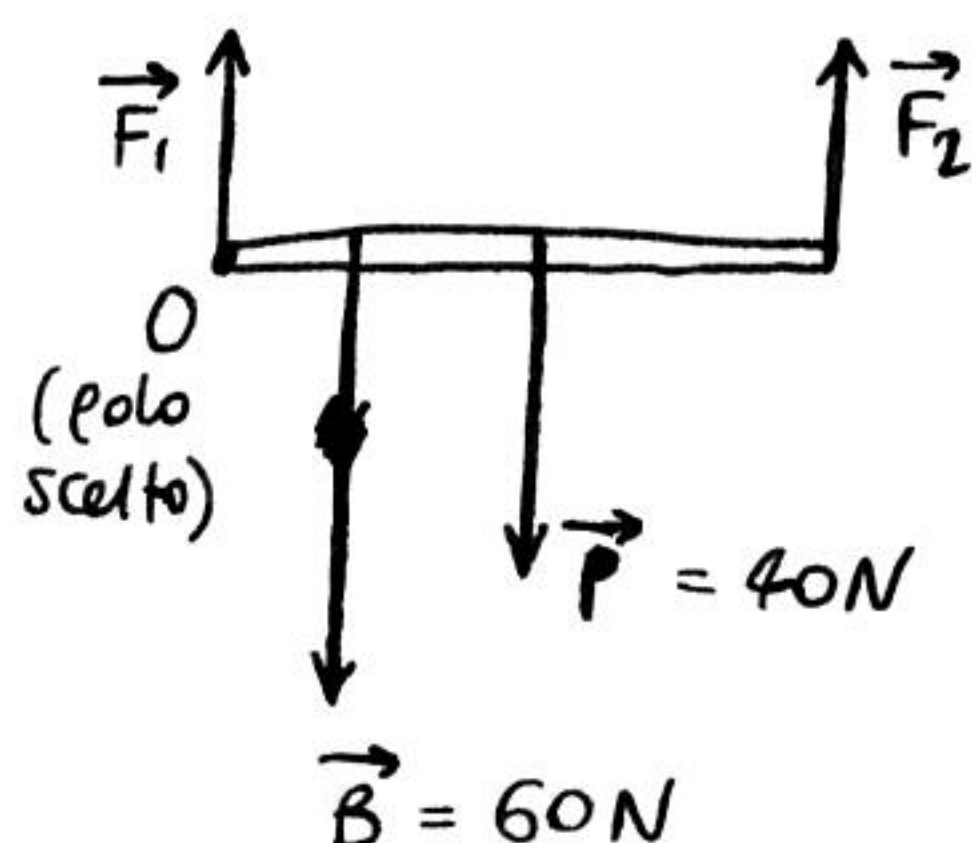
2 per le componenti del moto lungo i due assi, 1 per la rotazione (il momento delle forze ~~non~~ è calcolato rispetto a un unico asse, quello ortogonale al piano nel quale giacciono le forze).

Spesso però ci sono più forze incognite che equazioni per determinarle.

Assegnando arbitrariamente dei valori a certe forze, possiamo calcolare le rimanenti. Se però non abbiamo motivi per assegnare quel valore a quella forza, si hanno matematicamente un numero infinito di possibili soluzioni.

Lo studio delle proprietà dei corpi e della loro elasticità ci può fornire dati aggiuntivi, che ci permettono di trovare i valori giusti delle forze e quindi trovare un'unica soluzione alle equazioni. (~~anche~~ Nessun corpo è perfettamente rigido, anche se noi ~~per~~, per semplicità, supponiamo che lo sia in tutti i problemi che studiamo).

Una sbarra omogenea del peso di 40 N è appoggiata agli estremi a due dinamometri. A $\frac{1}{4}$ della lunghezza, a sinistra, è appeso un peso di 60 N. Cosa segnano i due dinamometri?



$\vec{F}_1$ = forza esercitata dal primo dinamometro sulla sbarra
 $\vec{F}_2$ = forza esercitata dal secondo dinamometro sulla sbarra
 $\vec{P}$ = forza peso della sbarra (applicata nel CM della sbarra)
 $\vec{B}$ = ~~peso della sbarra~~ peso appeso

1ª condizione per l'equilibrio:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 - \vec{P} - \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 + F_2 - 100 = 0$$

2ª condizione per l'equilibrio: (scegliamo come polo l'estremo sinistro della sbarra)

$$0 \cdot F_1 + l \cdot F_2 - \frac{l}{4} \cdot B - \frac{l}{2} \cdot P = 0 \quad \rightarrow \quad l F_2 - \frac{l}{4} 60 - \frac{l}{2} 40 = 0 \quad \rightarrow$$

$$F_2 - 15 - 20 = 0$$

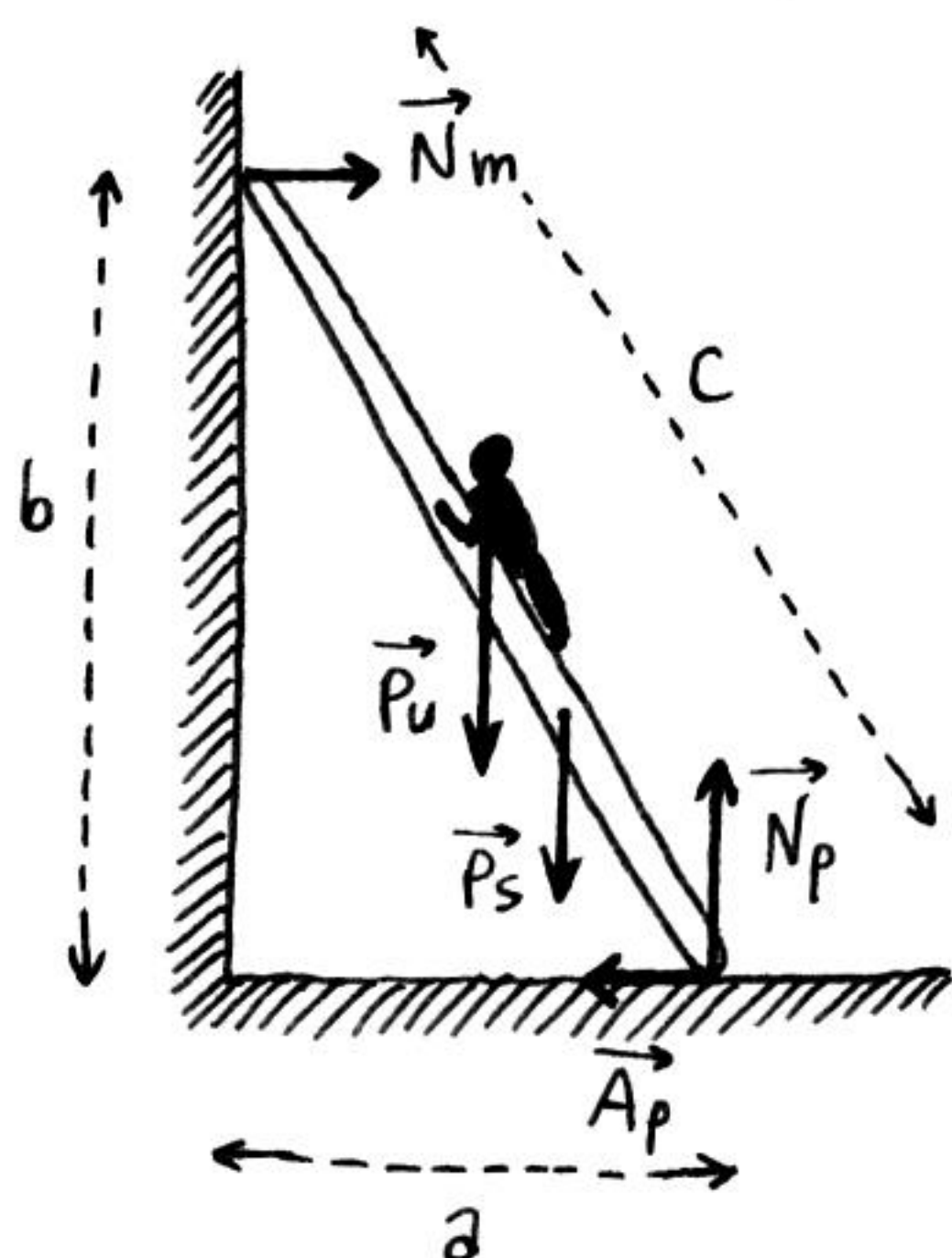
Quindi:

$$\begin{cases} F_1 + F_2 - 100 = 0 \\ F_2 - 35 = 0 \end{cases}$$

$$\text{da cui } F_2 = 35 \text{ N}, F_1 = 65$$

Il primo dinamometro segna 65 N, il secondo 35 N.

Una scala lunga 20 m e pesante 500 N si appoggia a un muro a 16 m dal suolo. Il centro di gravità della scala è a $\frac{1}{3}$ della sua altezza. Un uomo del peso di 800 N sale fino alla metà della scala. Il muro, ma non il pavimento, è senza attrito. Calcolare le forze agenti sul sistema.



$\vec{P}_s$ = peso scala = 500 N
 $\vec{P}_u$ = peso uomo = 800 N
 c = lunghezza scala = 20 m
 b = altezza appoggio scala = 16 m
 a = distanza muro/scala
 $\vec{N}_p$ = forza normale del pavimento sulla scala
 $\vec{N}_m$ = forza normale del muro sulla scala
 $\vec{A}_p$ = attrito pavimento/scala

$$a = 12 \text{ m}$$

1^a Condizione:

$$P_u + P_s - N_p = 0 \quad \rightarrow \quad 800 + 500 - N_p = 0$$

$$A_p - N_m = 0 \quad \rightarrow \quad A_p - N_m = 0$$

2^a condizione: (scegliamo come polo il punto di contatto scala/ suolo)

$$P_s \cdot \frac{a}{3} + P_u \cdot \frac{a}{2} - N_m \cdot b = 0 \quad \rightarrow \quad 2000 + 4800 - 16 N_m = 0$$

~~Non vanno considerate le forze normali applicate alla scala~~
 $\vec{N}_p$ e $\vec{A}_p$ hanno braccio = 0, perciò non compaiono nell'equazione

Quindi:

$$\begin{cases} 800 + 500 - N_p = 0 \\ A_p - N_m = 0 \\ 2000 + 4800 - 16 N_m = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} N_m &= 425 \text{ N} \\ A_p &= 425 \text{ N (opposto a } N_m) \\ N_p &= 1300 \text{ N} \end{aligned}$$

Il coefficiente d'attrito statico tra scala e suolo è $0,33$. Fino a dove può salire l'uomo sulla scala prima che questa scivoli?

$$\mu_s = \text{coefficiente d'attrito statico} = \frac{A_p}{N_p} = \frac{425}{1300} = 0,33$$

x = frazione della lunghezza della scala su cui può salire l'uomo prima che questa scivoli

$$1^a \text{ condizione: } P_u + P_s - N_p = 0 \rightarrow 800 + 1500 - N_p = 0$$

$$A_p - N_m = 0 \rightarrow A_p - N_m = 0$$

$$2^a \text{ condizione: } P_s \cdot \frac{2}{3} + \cancel{P_u \cdot 2x} - N_m \cdot 6 = 0 \rightarrow$$

$$2000 + \cancel{8000x} - 16 N_m = 0$$

Quindi:

$$\begin{cases} 1300 - N_p = 0 \\ A_p - N_m = 0 \\ 2000 + 9600x - 16 N_m = 0 \end{cases}$$

$$N_m = 125 + 600x$$

$$N_p = 1300$$

$$A_p = N_m$$

$$\mu_s = \frac{A_p}{N_p} \rightarrow A_p = \mu_s \cdot N_p \rightarrow A_p = 0,33 \cdot 1300 = 429$$

$$A_p = N_m \rightarrow 429 = 125 + 600x \rightarrow x = 0,507 \simeq \frac{1}{2} \quad \text{l'uomo può superare di poco la metà della scala}$$

(Per questa 2^a parte del problema, se conosceremo il valore di A_p , utilizzando magari i dati della 1^a parte del problema, non necessitavamo di conoscere μ_s e viceversa).

EQUILIBRIO STABILE, INSTABILE E INDIFFERENTE DI CORPI RIGIDI IN UN CAMPO GRAVITAZIONALE

La forza di gravità è conservativa, perciò si può definire per essa una funzione energia potenziale $U(x, y, z)$, tale che $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$.

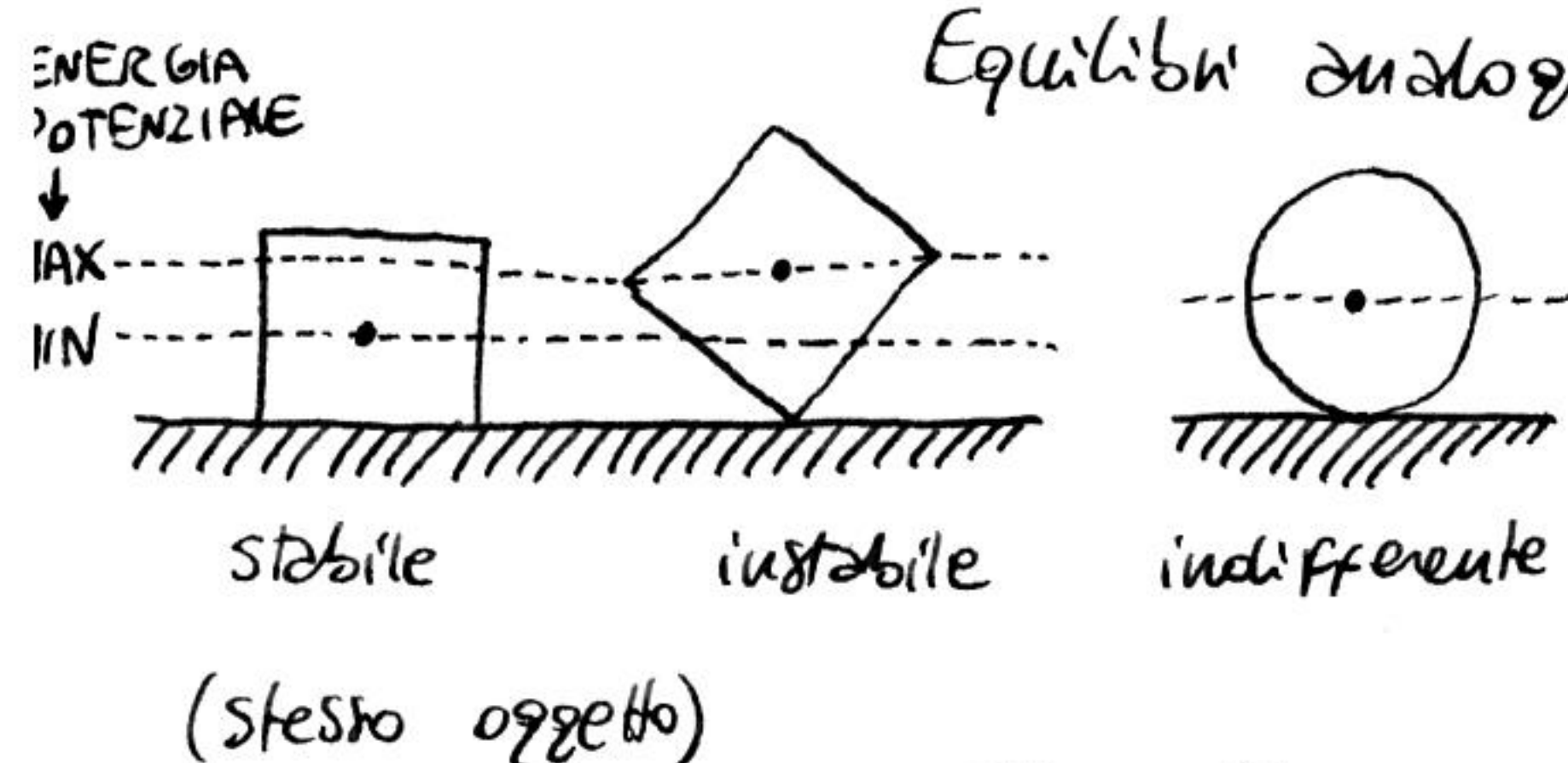
Nei punti dove $\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \rightarrow F_x = 0 \rightarrow$ la particella è in equilibrio traslazionale rispetto all'asse x . In quel punto $U(x)$ ha un massimo o un minimo, o è costante.

Quando U è ---	--- la particella in quel punto è in equilibrio ---	--- e ogni spostamento dalla posizione di equilibrio ---	
massima 	instabile	tenderà ad allontanarla ancora di più dalla posizione di equilibrio (agisce una forza in tale direzione)	non occorre fornire lavoro; l'energia necessaria a spostare la particella è fornita da essa stessa, col risultato di una diminuzione della sua energia potenziale
minima 	stabile	tenderà a riportarla di nuovo nella posizione di equilibrio (agisce una forza che tende a riportarla)	occorre fornire lavoro che si traduce in un aumento dell'energia potenziale della particella
costante 	indifferente	ovvero il risultato di lasciarla ferma lì dove è stata spostata (non si originano forze)	non viene fornito né occorre fornire lavoro

Un corpo può essere in equilibri diversi rispetto a diverse coordinate (es. una particella in un punto a sella o una palla in caduta libera).

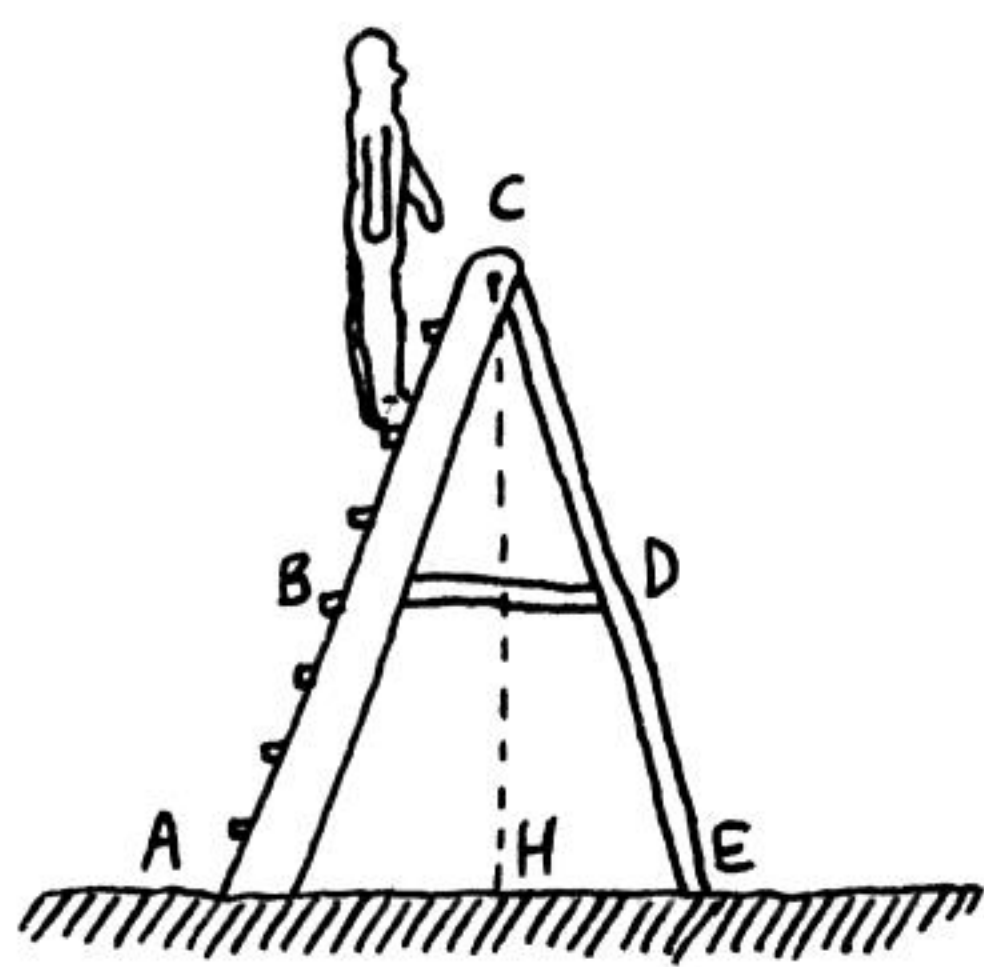
È possibile sostituire tutte le forze gravitazionali che agiscono su tutte le particelle di un corpo rigido, per quanto riguarda il moto traslazionale e rotatorio, con un'unica forza gravitazionale applicata nel centro di gravità del corpo.

Equilibri analoghi per un corpo rigido:



• = CENTRO DI GRAVITÀ

un corpo è in equilibrio stabile/instabile/indiff. se l'applicazione di una qualsiasi forza ~~libera~~ può solo alzare/abbassare/lasciare uguale il suo centro di gravità



$$AC = CE = 2 \text{ m} \quad BD = 0,6 \text{ m} \quad AB = BC$$

la scala è articolata in C, e ha peso trascurabile.
L'uomo pesa 80 kgf ed è salito per 1,5 m lungo la scala.
Il terreno è perfettamente liscio.

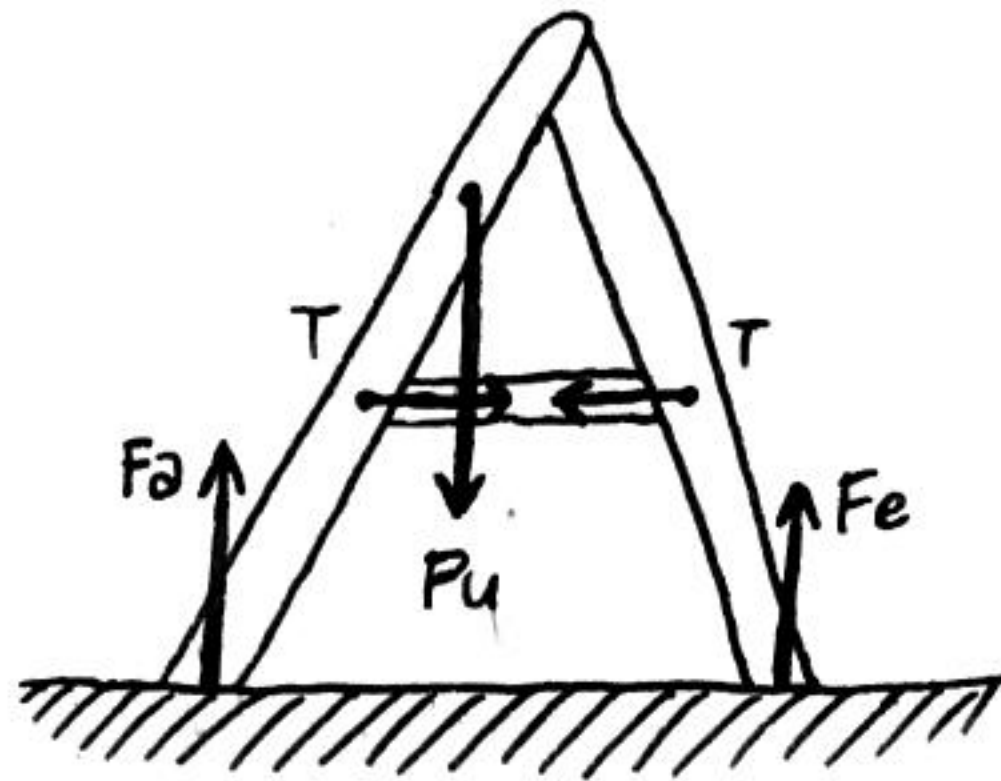
Trovare la tensione nella traversina BD e le forze esercitate dalla scala sul terreno.

Dalla geometria, $AH = 0,6 \text{ m}$; $CH = \sqrt{CA^2 - AH^2} = 1,9 \text{ m}$.

Per l'equilibrio traslazionale, si deve avere:

$$F_a + F_e - P_u = 0$$

$$T - T = 0 \quad (\text{identità})$$



Per l'equilibrio rotazionale, applichiamo separatamente le condizioni di equilibrio alle parti della scala (il polo è C e il verso orario è positivo).

Per la parte sinistra, si ha:

~~$$0,6 \cdot F_a - 0,95 \cdot T - 0,15 \cdot P_u = 0$$~~

e per la parte destra, si ha:

$$0,95 \cdot T - 0,6 \cdot F_e = 0.$$

Quindi si ha:

$$0,6 \cdot F_a - 0,95 \cdot T - 0,15 \cdot P_u = 0,95 \cdot T - 0,6 \cdot F_e$$

$$0,6 (F_a + F_e) - 1,9 \cdot T - 0,15 \cdot P_u = 0$$

$$0,6 \cdot P_u - 1,9 \cdot T - 0,15 \cdot P_u = 0$$

$$0,45 \cdot P_u - 1,9 \cdot T = 0$$

$$36 - 1,9 \cdot T = 0$$

$$T = 18,9 \text{ kgf} \quad (\text{tensione della traversina}).$$

Sostituendo tale risultato nelle singole equazioni di equilibrio rotazionale, si ha:

$$0,6 \cdot F_a - 0,95 \cdot 18,9 - 0,15 \cdot 80 = 0$$

$$F_a = 50 \text{ kgf} \quad (\text{forza esercitata dalla scala nel punto A})$$

e si ha:

$$0,95 \cdot 18,9 - 0,6 \cdot F_e = 0$$

$$F_e = 30 \text{ kgf} \quad (\text{forza esercitata dalla scala nel punto E}).$$

15 OSCILLAZIONI

Un moto che si ripete a intervalli di tempo uguali e' detto MOTO PERIODICO.

Una particella che si muove avanti e indietro lungo lo stesso percorso compie un MOTO OSCILLATORIO o MOTO VIBRATORIO.

Quando i limiti di oscillazione non sono fissi, perche' l'energia viene dissipata da forze di attrito, il moto e' un MOTO OSCILLATORIO SMORZATO.

Le oscillazioni meccaniche e elettromagnetiche sono regolate dalle stesse equazioni fondamentali.

GRANDEZZE DI UN MOTO OSCILLATORIO PERIODICO

T periodo (tempo nel quale viene compiuta un'oscillazione completa, o ciclo)

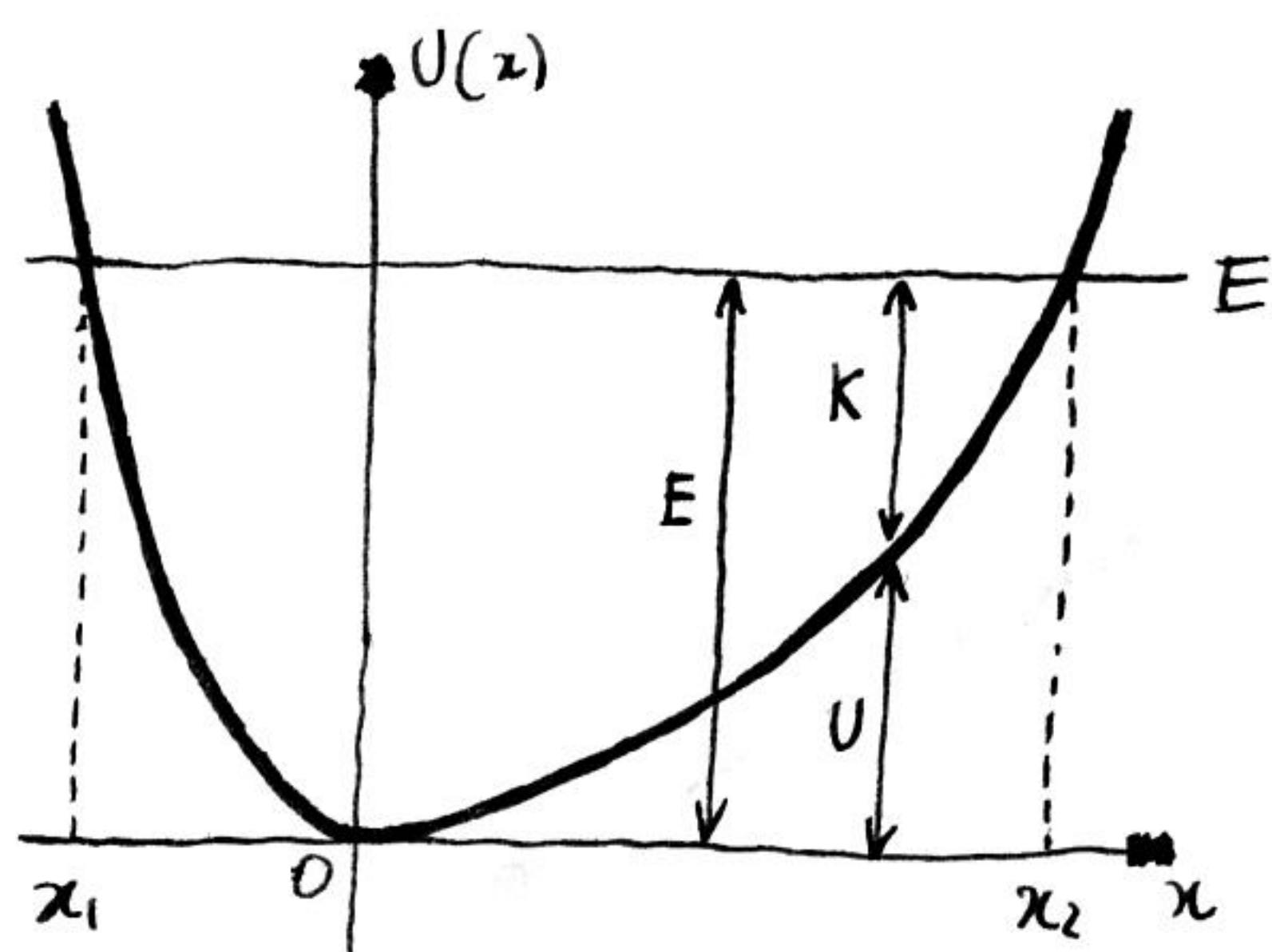
ν frequenza (numero di cicli nell'unita' di tempo)

misurata in Hertz: $1 \text{ Hz} = \frac{1 \text{ ciclo}}{\text{sec}}$

$$\nu = \frac{1}{T}$$

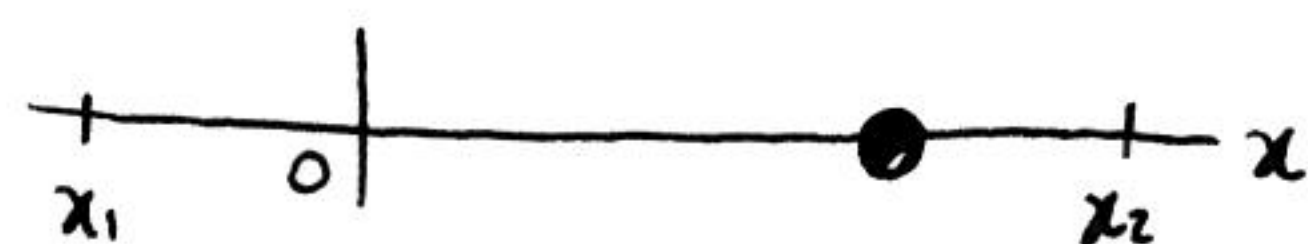
La posizione nella quale non agisce nessuna forza sulla particella oscillante e' detta posizione di EQUILIBRIO.

Lo SPOSTAMENTO e' la distanza, in ogni istante, della particella dalla posizione di equilibrio; lo spostamento e' detto anche ELONGAZIONE.

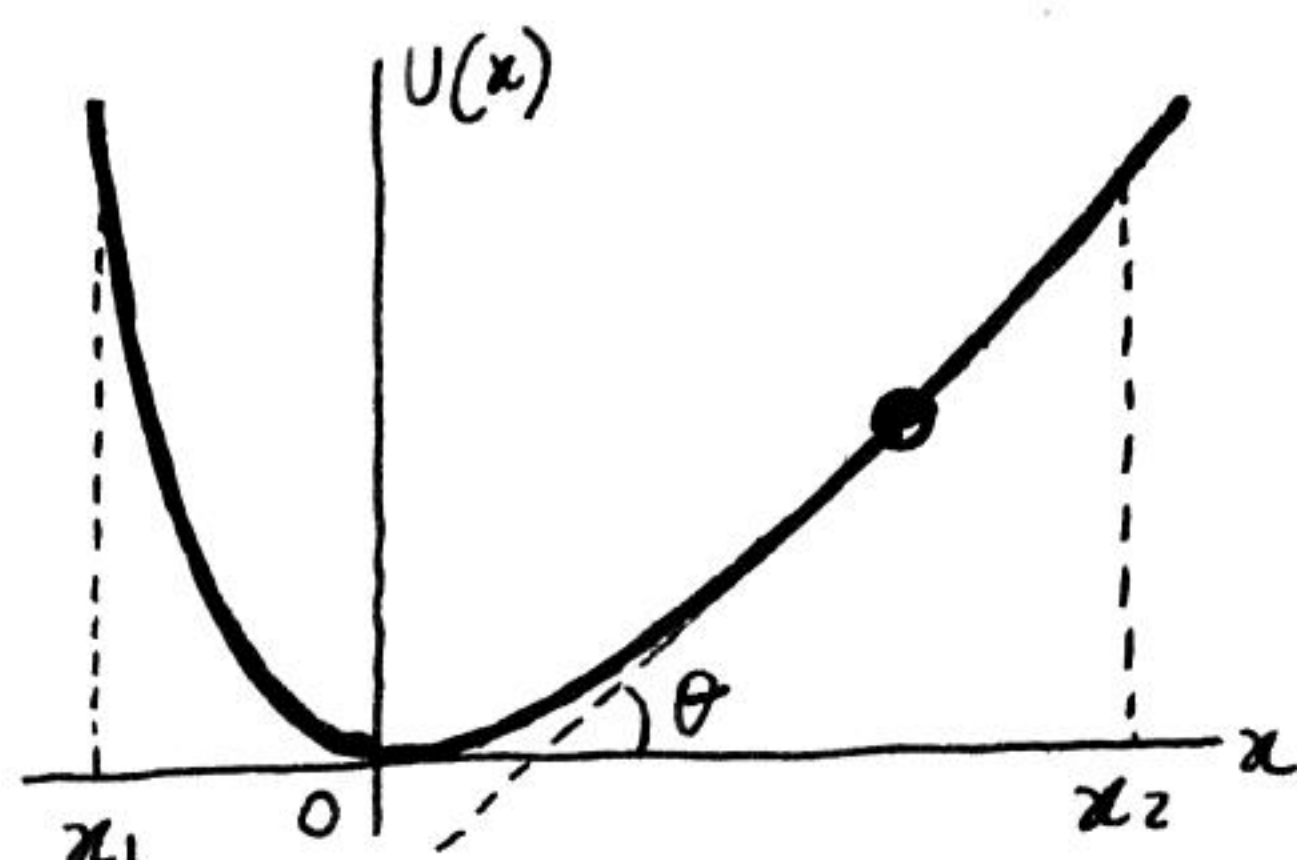


$$K + U = E = \text{costante}$$

Consideriamo una particella che oscilla avanti e indietro lungo una retta tra limiti fissi.

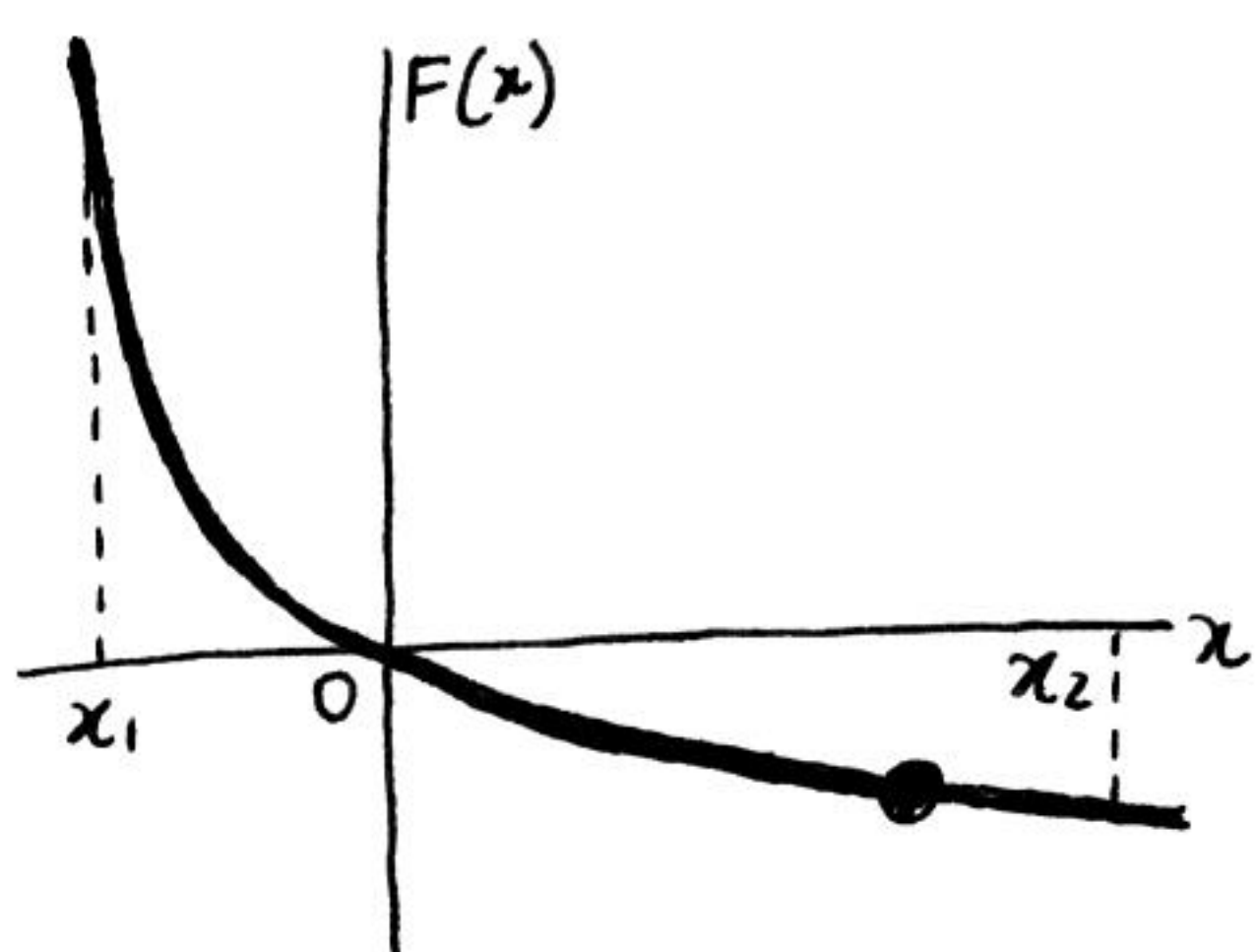


Il suo spostamento $\vec{x}$ varia periodicamente in modulo e direzione, e con pure la sua velocità $\vec{v}$ e la sua accelerazione $\vec{a}$, e quindi pure la forza $\vec{F}$ che agisce sulla particella, dal momento che $\vec{F} = m\vec{a}$.



Tale particella che si muove di moto periodico oscilla avanti e indietro, ripassando per il punto di equilibrio dove l'energia potenziale è minima.

Qui la pendenza = $\tan \theta = \frac{dU}{dx}$.

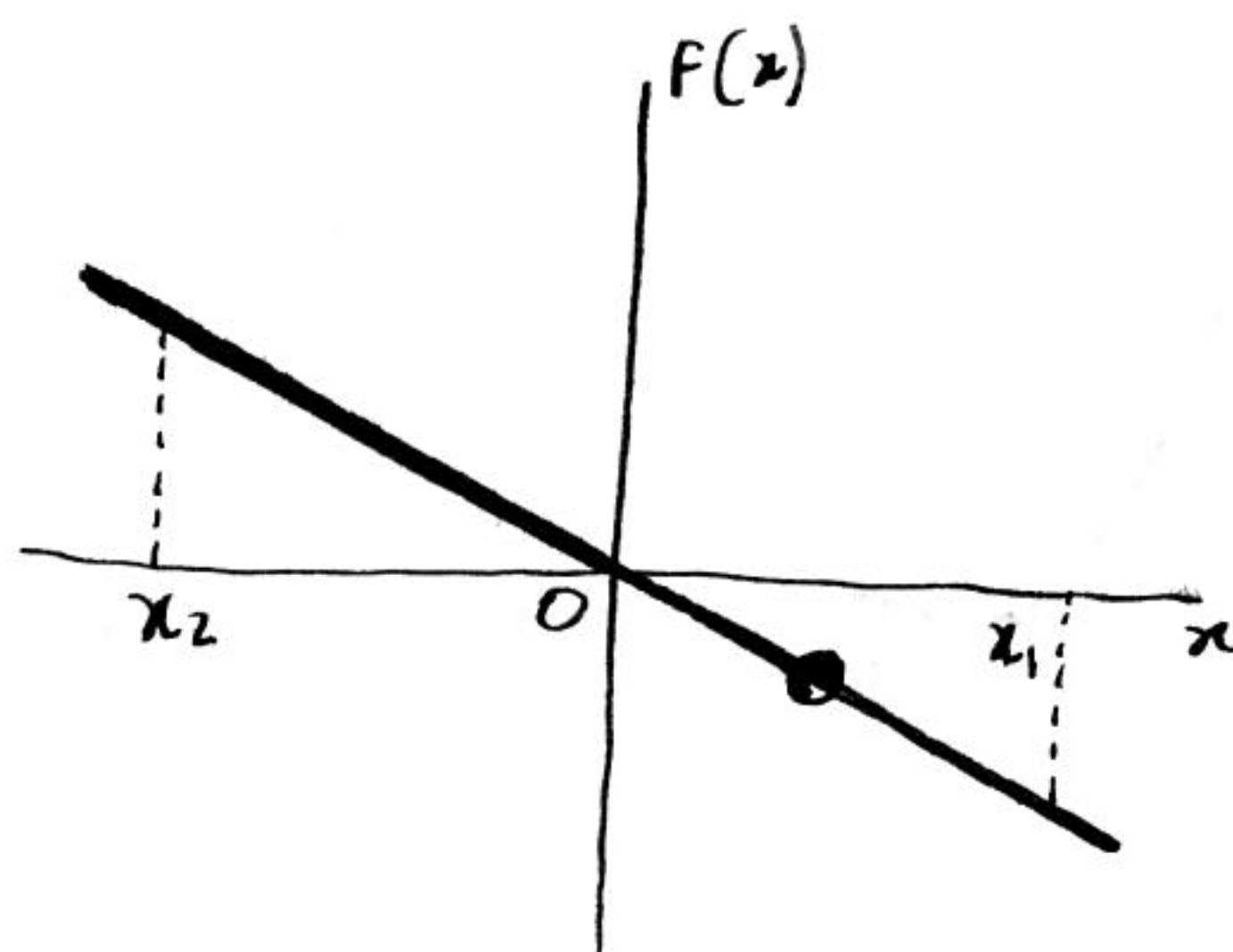
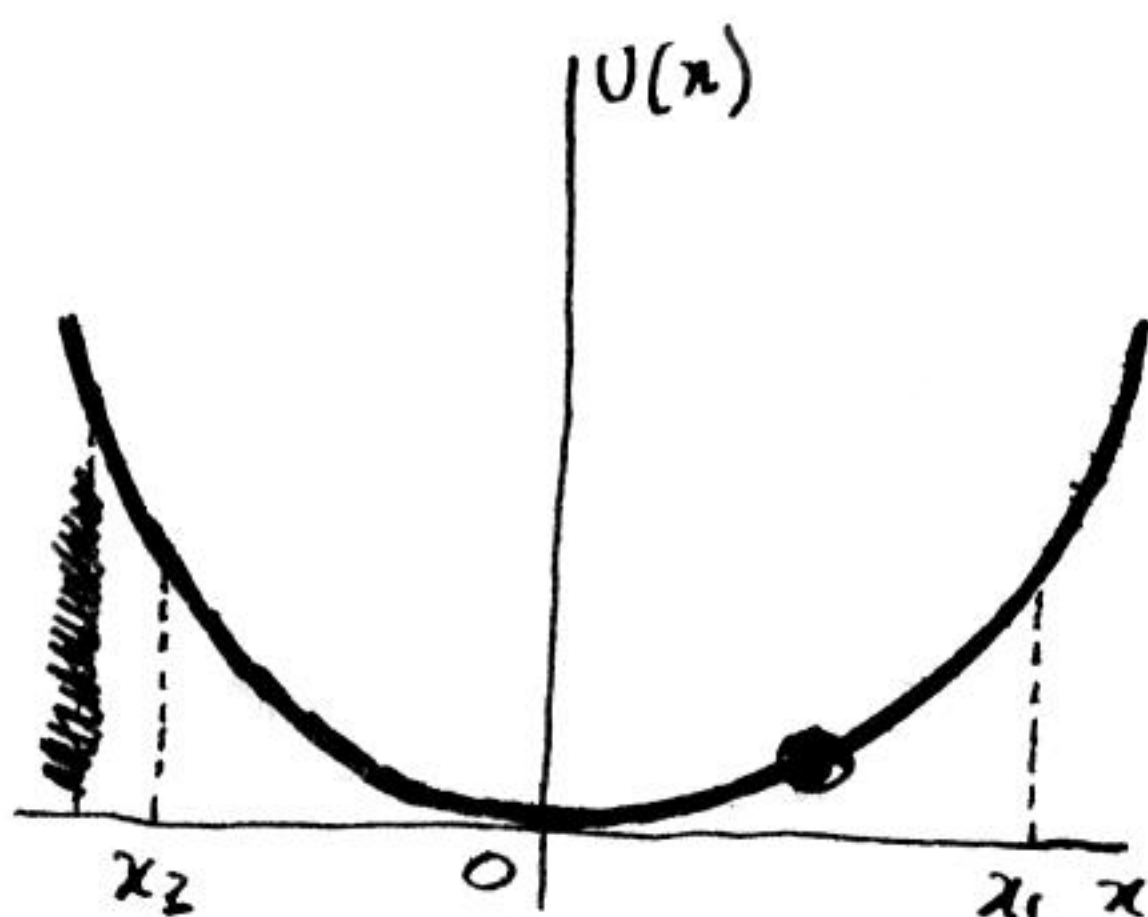
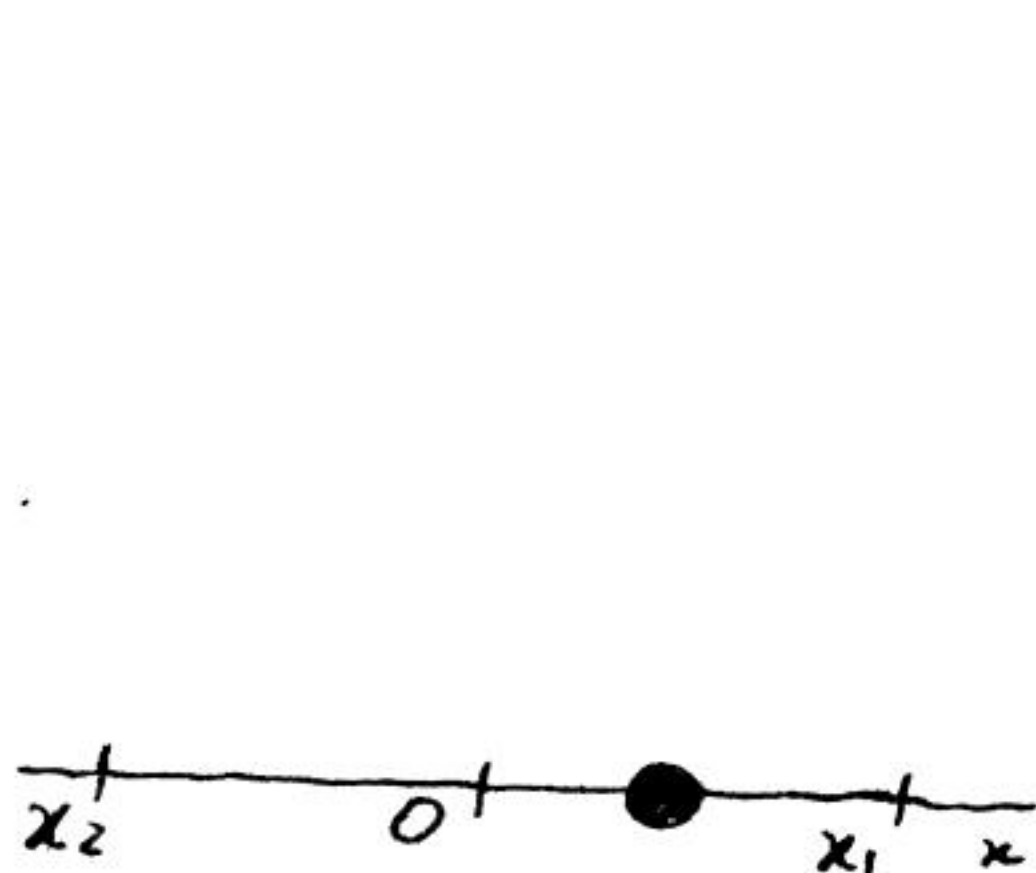


La forza agente sulla particella è ricavata da $F = -\frac{dU}{dx}$; come si vede, tale forza ha verso opposto allo spostamento $\vec{x}$ e perciò agisce sempre verso il punto di equilibrio; e cioè una forza di richiamo. In tale moto la posizione di equilibrio è perciò sempre una posizione di equilibrio stabile.



Consideriamo una particella che si muove avanti e indietro ripassando per il punto di equilibrio e sulla quale agisca una forza $F = -kx$ e che abbia un potenziale $U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$; tale particella è un oscillatore armonico semplice e compie un **MOTO ARMONICO SEMPLICE**.

In un moto armonico semplice i limiti di oscillazione sono equidistanti dal punto di equilibrio. Tale distanza è detta AMPIEZZA dell'oscillazione.



Ogni problema in cui ci siano vibrazioni meccaniche, se queste sono di piccola ampiezza, si può ricondurre al moto armonico semplice; ovvero, la curva della forza di richiamo $F(x)$, presa nell'origine in un intervallo abbastanza piccolo, può essere approssimata a una retta, che è propria del moto armonico semplice.

L'espressione che abbiamo utilizzato prima, $F(x) = -kx$, è la legge di Hooke, valida per le molle ideali e per molti altri materiali elastici, all'interno della regione di proporzionalità, cioè fino al punto del limite di elasticità di quel determinato materiale, punto oltre il quale il materiale si deforma troppo o si rompe e non segue quindi più la legge di Hooke; perciò, all'interno di tale regione di proporzionalità, il materiale si comporta come un oscillatore armonico semplice. Se si tratta di una molla, k è la sua costante elastica; se si tratta invece di un altro sistema oscillante, k è legato alle sue caratteristiche fisiche.

$F = -kx$ e, dalla 2ª legge di Newton, $F = ma$; perciò

$$-kx = ma \rightarrow ma + kx = 0 \rightarrow a + \frac{k}{m}x = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Questa equazione differenziale è l'equazione del moto di un oscillatore armonico semplice, e ci dà lo spostamento x in funzione del tempo t . Risolviamola.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

tale equazione richiede che $x(t)$ sia una funzione la cui derivata seconda sia la stessa funzione cambiata di segno, a parte il fattore costante k/m . Solo il seno e il coseno hanno questa proprietà (e, come il moto armonico, sono entrambi periodici e limitati).

Teniamo perciò come soluzione $x = A \cos(\omega t + \varphi)$;

si avrà dunque $\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$ e $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$.

Sostituendo tali relazioni nell'equazione differenziale di partenza, si ottiene

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \varphi)$$

che è valida per $\omega^2 = \frac{k}{m}$, ovvero $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

In conclusione, per $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ è una soluzione dell'equazione del moto per l'oscillatore armonico semplice.

Se aumentiamo il tempo di una quantità $\frac{2\pi}{\omega}$, abbiamo:

$$x = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) + \varphi \right] = A \cos [\omega t + 2\pi + \varphi] = A \cos (\omega t + \varphi)$$

Cioè la funzione $x(t)$ si ripete identica dopo un tempo $\frac{2\pi}{\omega}$, che è quindi il periodo della funzione.

PERIODO $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

FREQUENZA $\gamma = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

Quindi $\omega = 2\pi\gamma = \frac{2\pi}{T}$ FREQUENZA ANGOLARE o PULSAZIONE e si misura in radianti/sec

La funzione coseno assume valori compresi tra -1 e 1; lo spostamento x del punto di equilibrio ha come valore massimo A ; perciò-

$A =$ AMPIEZZA del moto

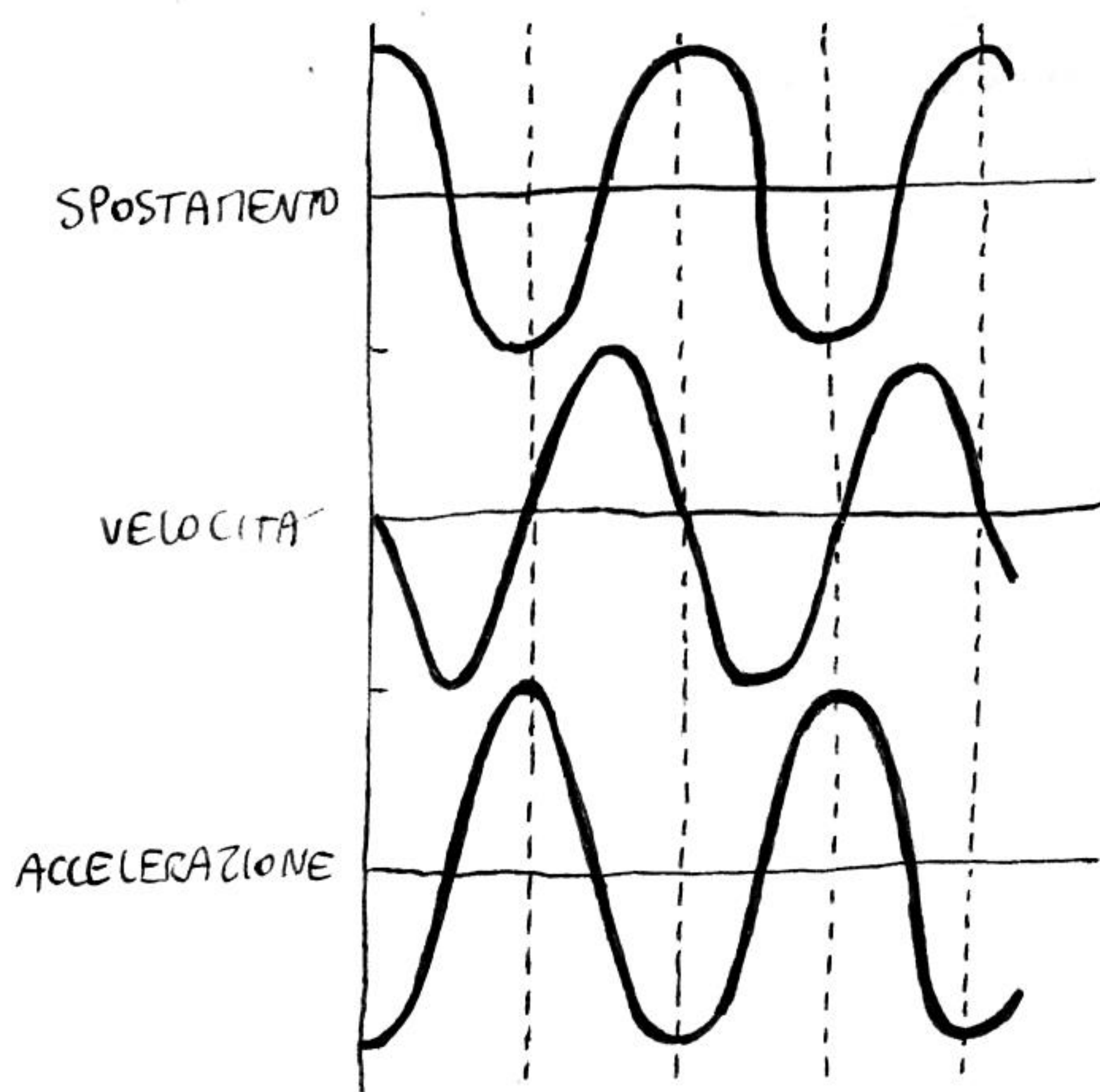
$(\omega t + \varphi) =$ FASE del moto

$\varphi =$ COSTANTE DI FASE

$$\varphi_0 = \varphi_0 + 2n\pi \quad n \in \mathbb{N}$$

A e φ sono determinate in modo univoco da posizione e velocità iniziali della particella oscillante.

ESEMPIO (qui $\varphi=0$):



$$x = A \cos (\omega t + \varphi)$$

$$x_{\max} = A$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin (\omega t + \varphi)$$

$$v_{\max} = \omega A$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos (\omega t + \varphi)$$

$$a_{\max} = \omega^2 A$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA NEL MOTTO ARMONICO SEMPLICE

Essendo $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

l'energia potenziale e- $U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} k A^2$$

Essendo $v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$ e $\omega^2 = \frac{k}{m}$

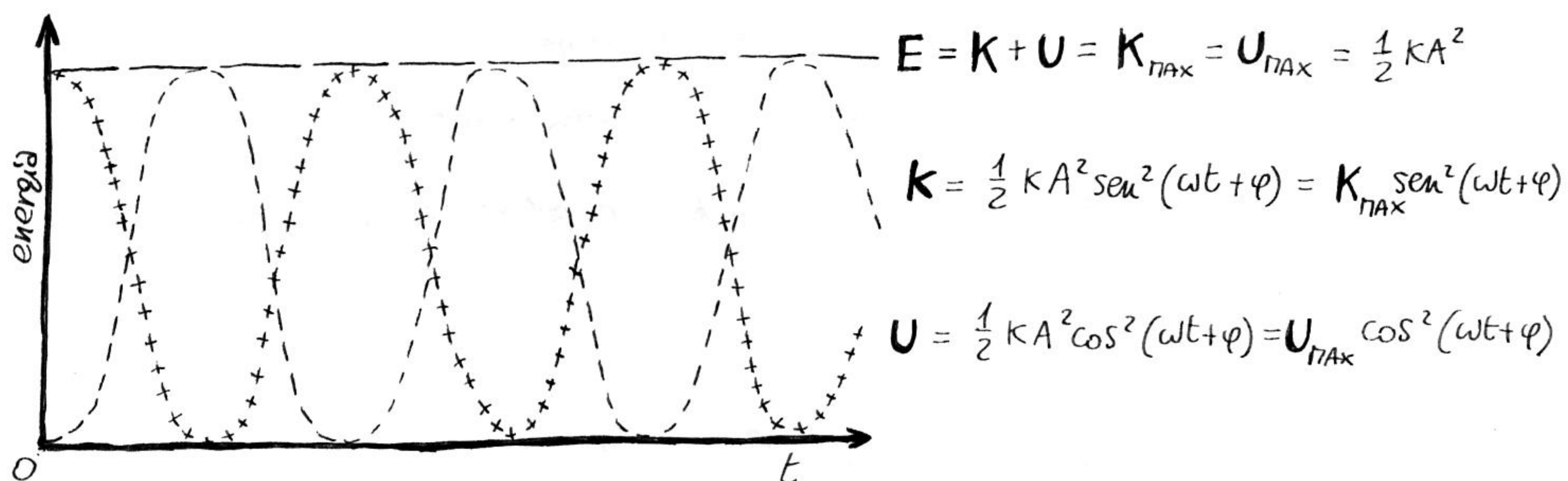
l'energia cinetica e- $K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

$$K_{\max} = \frac{1}{2} k A^2$$

L'energia totale e-

$$\begin{aligned} E = K + U &= \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 [\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] \\ &= \frac{1}{2} k A^2 \end{aligned}$$

GRAFICO DELL'ENERGIA



(qui $\varphi = 0$)

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \rightarrow m v^2 + k x^2 = k A^2 \rightarrow v^2 = \frac{k}{m} (A^2 - x^2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)} = \omega \sqrt{A^2 - x^2}}$$

$$F = m a = -k x \rightarrow m a = -k x \rightarrow \boxed{a = -\frac{k}{m} x = -\omega^2 x}$$

(formule per ricavare velocità e accelerazione, conoscendo lo spostamento)

Una molla orizzontale è allungata di $0,03 \text{ m}$ quando una forza di 9 N agisce su di essa. A questa molla viene attaccata una massa di 1 kg ; la massa, allontanata di $0,04 \text{ m}$ dalla posizione di equilibrio, viene lasciata libera di compiere oscillazioni armoniche.

* Quanto vale la costante elastica della molla?

$$F = kx \rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{9}{0,03} = 300 \text{ N/m}.$$

* Quanto vale la forza esercitata dalla molla sulla massa, prima che questa sia abbandonata?

$$\text{In quell'istante la molla è allungata di } 0,04 \text{ m}; F = -kx = -300 \cdot 0,04 = -12 \text{ N}.$$

* Qual è il periodo dell'oscillazione?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{300}} = 0,36 \text{ s}.$$

$$\text{La frequenza è } \nu = \frac{1}{T} = 2,78 \text{ Hz} \text{ e la pulsazione è } \omega = 2\pi \nu = 17,45 \text{ rad/s}.$$

* Qual è l'ampiezza del moto?

L'ampiezza del moto corrisponde al punto di max energia potenziale e energia cinetica nulla, ovvero la posizione iniziale; perciò $A = 0,04 \text{ m}$.

* Quali sono velocità e accelerazione massima del corpo vibrante?

$$v_{\text{max}} = \omega A = 17,45 \cdot 0,04 = 0,70 \text{ m/s} \quad a_{\text{max}} = \omega^2 A = 12,18 \text{ m/s}^2.$$

* Calcolare velocità, accelerazione, energia cinetica e potenziale del corpo in $x = A/2$.

In quel punto $x = 0,02 \text{ m}$, perciò

$$v = \omega \sqrt{(A^2 - x^2)} = -0,60 \text{ m/s} \quad a = -\omega^2 x = -6,10 \text{ m/s}^2$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-0,60)^2 = 0,18 \text{ J} \quad U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot (0,02)^2 = 0,06 \text{ J}$$

* Calcolare l'energia totale del sistema oscillante.

Poiché l'energia totale è costante, possiamo calcolarla in un istante qualsiasi, per esempio dai risultati precedenti: $E = K + U = 0,18 + 0,06 = 0,24 \text{ J}$.

* Qual è lo spostamento del corpo in funzione del tempo?

$$x = A \cos(\omega t + \varphi); \text{ } \omega \text{ l'abbiamo già calcolato, troviamo ora } \varphi.$$

$$\text{All'istante } t=0 \text{ sappiamo che } x=0,04 \text{ m, perciò } x = A \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow$$

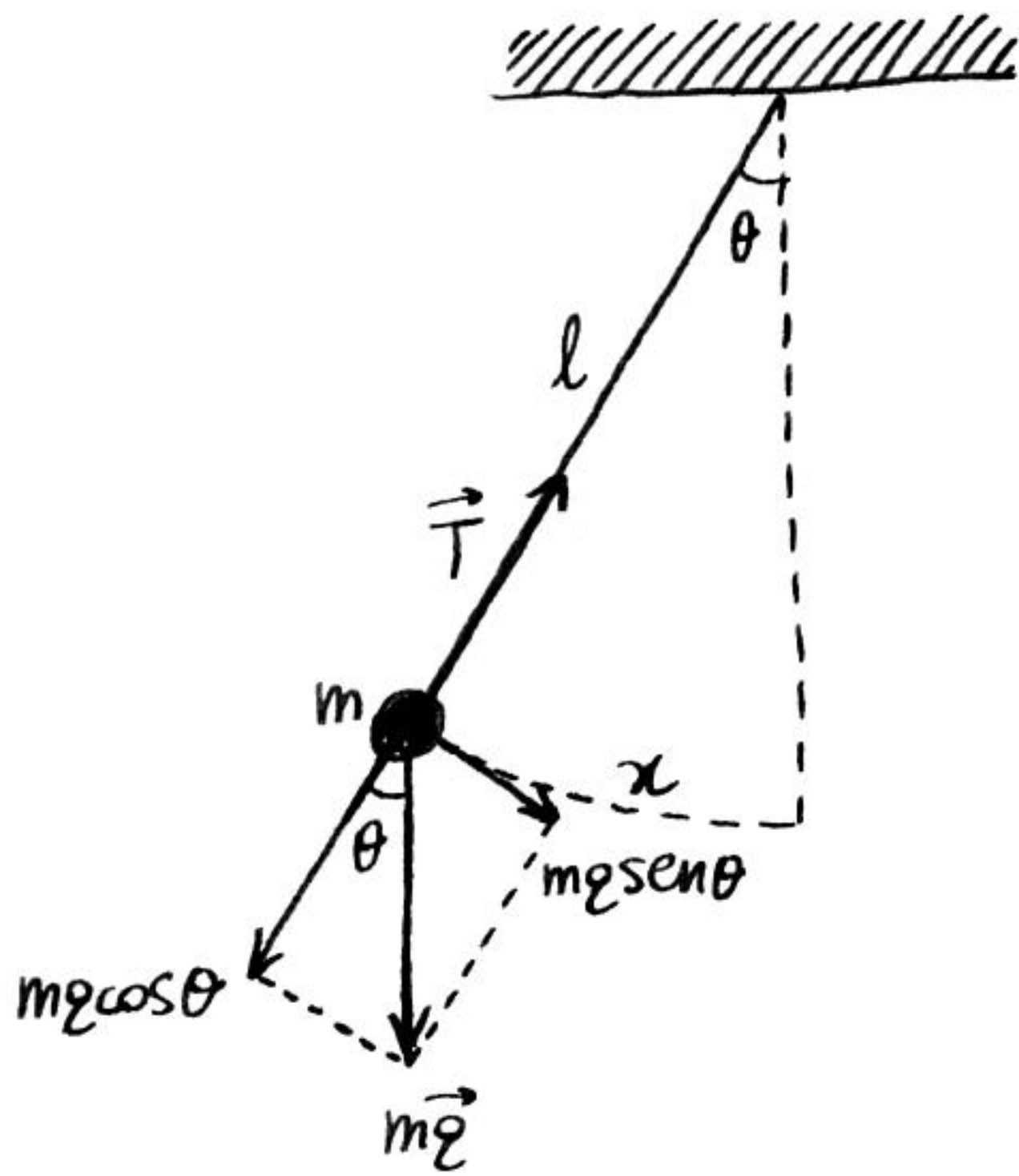
$$0,04 = 0,04 \cos(17,45 \cdot 0 + \varphi) \rightarrow \varphi = 0.$$

Perciò l'equazione del moto richiesta è

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = 0,04 \cos(17,45 \cdot t).$$

PENDOLO SEMPLICE

È un sistema ideale composto da una massa puntiforme sospesa a un filo inestensibile e di massa nulla. Spostando il pendolo dalla posizione di equilibrio, esso oscilla avanti e indietro in un piano verticale, sotto l'azione della gravità.



La forza di richiamo è $F = -mg \sin \theta$

(F è proporzionale non allo spostamento angolare θ , ma a $\sin \theta$, perciò il moto non è armonico. Però, per piccoli angoli, $\theta \simeq \sin \theta$)

Lo spostamento lungo l'arco di cerchio è $x = l\theta$

Dunque

$$F = -mg \sin \theta \simeq -mg \theta = -mg \frac{x}{l} = -\frac{mg}{l} x$$

perciò (per piccoli spostamenti) la forza di richiamo è proporzionale all'elongazione e diretta nel verso opposto, e questa è la condizione del moto armonico semplice.

È verificata la $F = -Kx$ per $K = \frac{mg}{l}$.

Il periodo di un moto armonico semplice è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \text{ e dunque, per il pendolo semplice,}$$

$$T = 2\pi \sqrt{m \cdot \frac{l}{mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

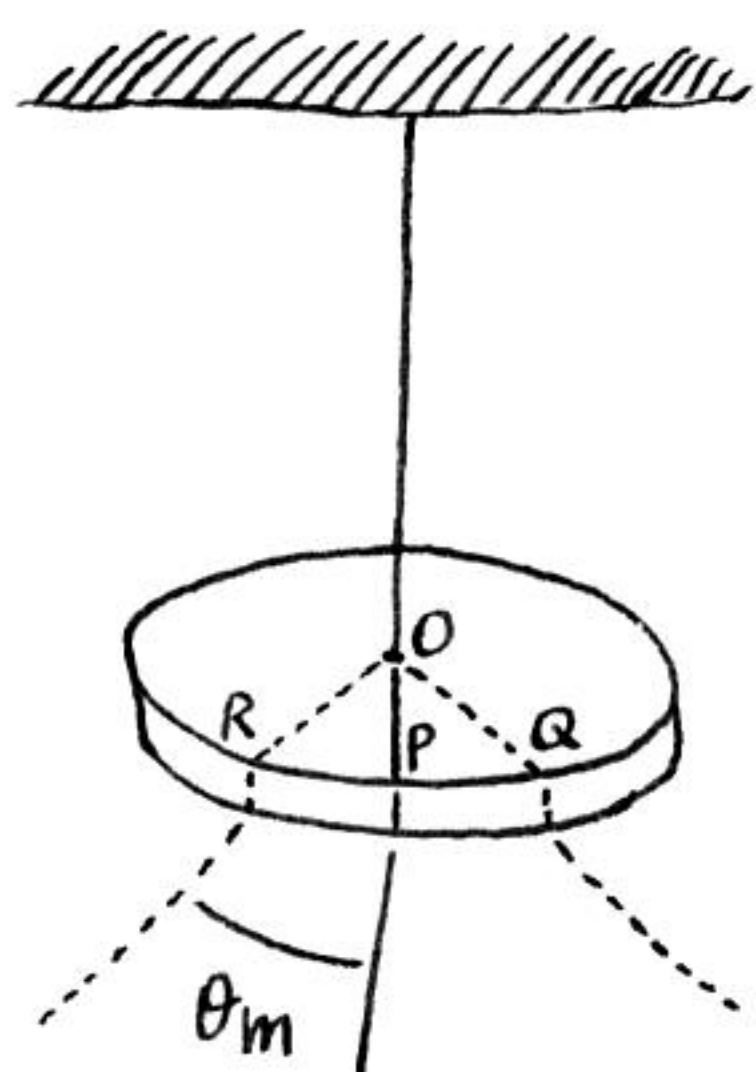
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

PERIODO DEL PENDOLO SEMPLICE

PENDOLO DI TORSIONE

È un sistema composto da un disco sospeso a un filo per il suo CM.

Col disco nella posizione di equilibrio, tracciamo una linea che congiunge il centro O col punto P sul bordo. Ruotando ora il disco fino al punto R e lasciandolo libero, il disco ruota avanti e indietro spazzando l'angolo $\widehat{RQ}$, a causa della forza di torsione del filo. ($\widehat{ROP} = \widehat{POQ}$)



Il momento di richiamo che tende a riportare il disco nel punto di equilibrio P è $\tau = -\kappa \theta$ (condizione per il moto armonico semplice) dove κ è la costante di torsione del filo.

$$\text{Si ha } \tau = I \alpha = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\text{perciò } \tau = -\kappa \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\text{da cui } \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I} \theta$$

MOTO ARMONICO SEMPLICE LINEARE	PENDOLO DI TORSIONE
k	κ
m	I
x	θ
A	θ_m

Tutte queste equazioni sono identiche a quelle usate per il moto armonico semplice lineare. Perciò l'equazione del moto del pendolo di torsione è

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

dove θ_m = elongazione angolare massima.

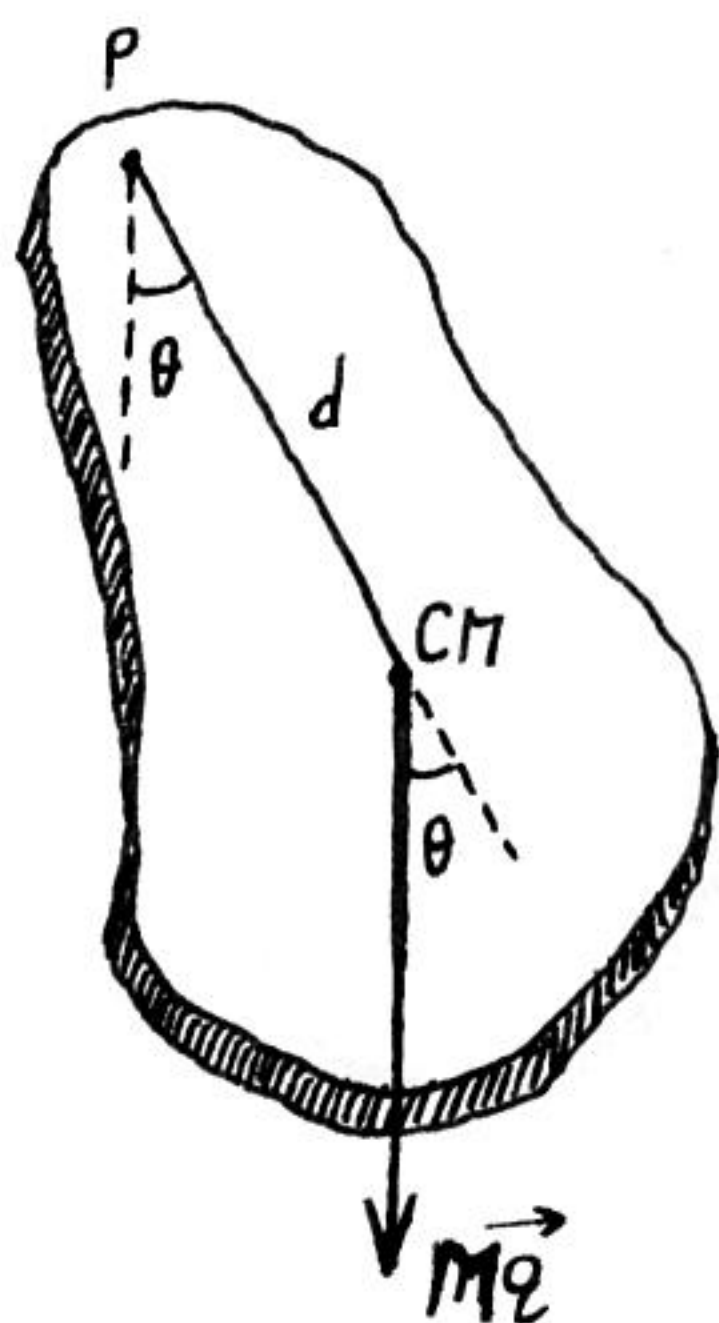
Sappiamo quindi che il periodo sarà

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad \text{PERIODO DEL PENDOLO DI TORSIONE}$$

PENDOLO FISICO

È un qualsiasi corpo rigido che possa oscillare in un piano verticale attorno a un asse (e un sistema reale).



Il corpo è sospeso per il punto P (asse orizzontale); viene spostato di un angolo θ dalla sua posizione di equilibrio, che è quella in cui il CM si trova nella verticale passante per P.

M è la massa del corpo, I il suo momento d'inerzia rispetto al polo P, e d la distanza $\overline{PCM}$ (distanza punto di sospensione - centro di massa).

Il momento della forza di richiamo (forza di gravità) è $\tau = -dMg \sin \theta \simeq -dMg \theta$

(τ è proporzionale a $\sin \theta$ e non a θ , perciò il moto non è armonico. Però, per piccole ampiezze, $\sin \theta \simeq \theta$)

$\tau = -k^* \theta$ (condizione per il moto armonico semplice) a condizione che sia $k^* = dMg$

$$\tau = I \alpha = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{\tau}{I} = -\frac{k^*}{I} \theta$$

Si procede in modo identico al pendolo di torsione. Si avrà quindi:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k^*}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{dMg}} \quad \text{Cio' è valido per}$$

Corpi di qualunque forma e per qualunque punto di sospensione.

$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{dMg}}$

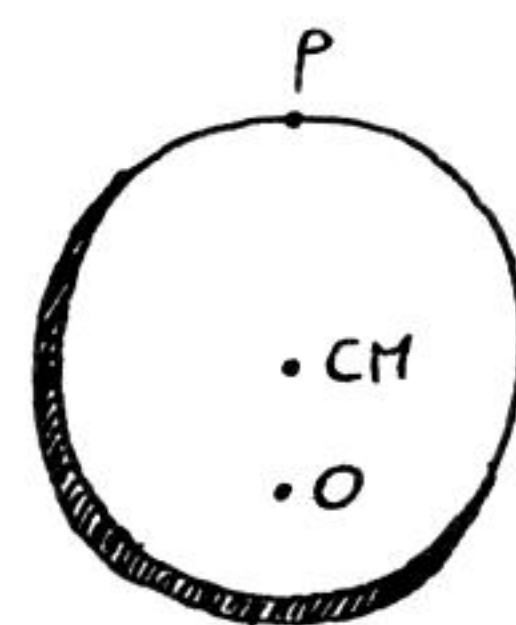
 PERIODO DEL PENDOLO FISICO

Trovare la lunghezza del pendolo semplice il cui periodo è uguale a quello di un determinato pendolo fisico.

Uguagliando le due espressioni dei periodi si ha:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} \rightarrow l = \frac{I}{Md}$$

Cioè, per il calcolo del periodo di un pendolo fisico, la sua massa può pensarsi concentrata in un punto, distante $\frac{I}{Md}$ dal ~~pendolo fisico~~ ^{perno} e chiamato CENTRO DI OSCILLAZIONE.



P = PERNO
CM = CENTRO (DI MASSA)
O = CENTRO DI OSCILLAZIONE

Trovare il periodo di un disco impennato sul bordo.

Il suo momento d'inerzia rispetto a un asse passante per il CM è $\frac{1}{2}Mr^2$ e quello ~~per~~ rispetto a un punto sul bordo è $I = \frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2 = \frac{3}{2}Mr^2$; qui $d = r$.

$$\text{Si ha } T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{3Mr^2}{2Mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{r}{g}}$$

Il centro di oscillazione ha distanza dal perno $l = \frac{I}{Md} = \frac{3Mr^2}{2Mr} = \frac{3}{2}r$; si trova cioè sotto il CM, a metà strada tra il CM e il bordo.

Se ora mettiamo il perno nel centro di oscillazione, il momento d'inerzia d'innanzi è $I = \frac{1}{2}Mr^2 + M(\frac{r}{2})^2 = \frac{3}{4}Mr^2$, e $d = \frac{1}{2}r$. Si ha quindi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{3Mr^2}{4Mg\frac{1}{2}r}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{r}{g}}, \text{ come prima.}$$

Perciò, se ~~mettiamo il perno nel centro di oscillazione~~ sospendiamo un corpo per il ~~pendolo~~ centro di oscillazione, il vecchio perno diviene il nuovo punto di oscillazione, e il periodo resta invariato.

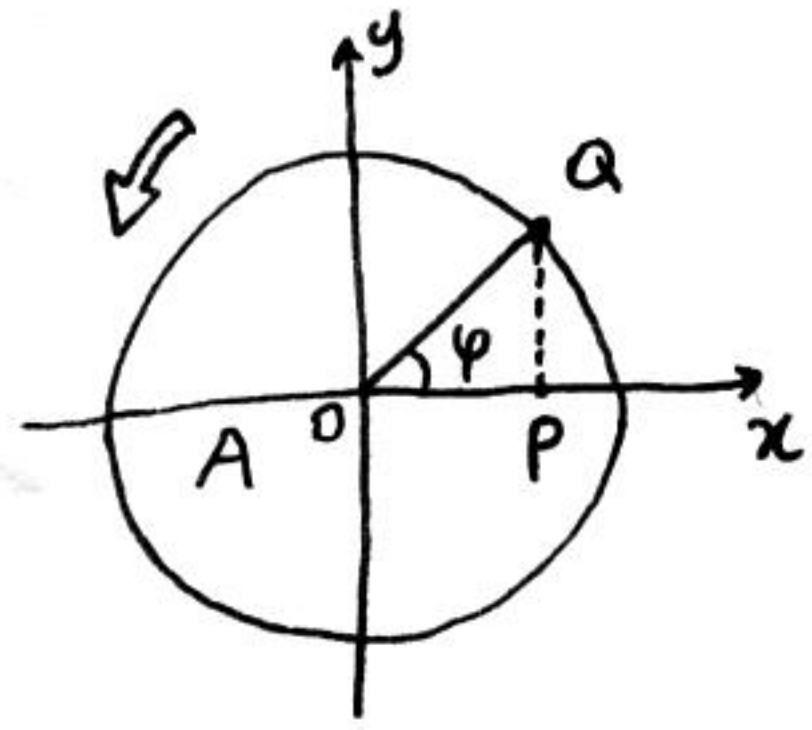
Inoltre, una forza impulsiva (orizzontale e sul piano di oscillazione) applicata nel centro di oscillazione non dà alcuna reazione sul perno.

Consideriamo una forza impulsiva F agente verso sinistra nel punto O del disco.

Tale forza produce una accelerazione traslatoria di P ~~accelerazione~~ $\vec{a}' = F/M$ (verso sinistra), e anche una ^{accelerazione rotatoria} ~~accelerazione~~ in senso orario di P $\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{F \cdot \frac{r}{2}}{\frac{1}{2}Mr^2} = \frac{F}{Mr}$, che a sua volta produce una accelerazione traslatoria di P $\vec{a}'' = \alpha r = F/Mr \cdot r = F/M$ (verso destra).

26 Perciò ~~accelerazione~~ $\vec{a}' + \vec{a}'' = 0$ e il perno P non si muove.

RELAZIONE FRA MOTO ARMONICO SEMPLICE E MOTO CIRCOLARE UNIFORME



Q è un punto (PUNTO DI RIFERIMENTO) che si muove su un cerchio (CERCHIO DI RIFERIMENTO) di raggio A con velocità ω costante.

P è la proiezione di Q sull'asse x, e si muove avanti e indietro sull'asse x come Q percorre il cerchio.

Al tempo $t=0$, $\overline{OQ}$ forma con l'asse x un angolo φ ; al tempo t, formerà con l'asse x un angolo $(\omega t + \varphi)$.

Al tempo t, la coordinata x di Q (che è identica a quella di P) sarà

$x = A \cos(\omega t + \varphi)$, che è l'equazione del moto armonico semplice.

Perciò il moto armonico semplice può essere visto come la proiezione di un moto circolare uniforme su un diametro di tale cerchio.

MOTO ARMONICO SEMPLICE

---Corrisponde a---

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Frequenza angolare ω

velocità angolare del p. di rif.

Frequenza γ

numero di giri del p. di rif. nell'unità di tempo

periodo T

tempo impiegato dal ~~amp.~~ p. di rif. a compiere un giro

Fase $(\omega t + \varphi)$

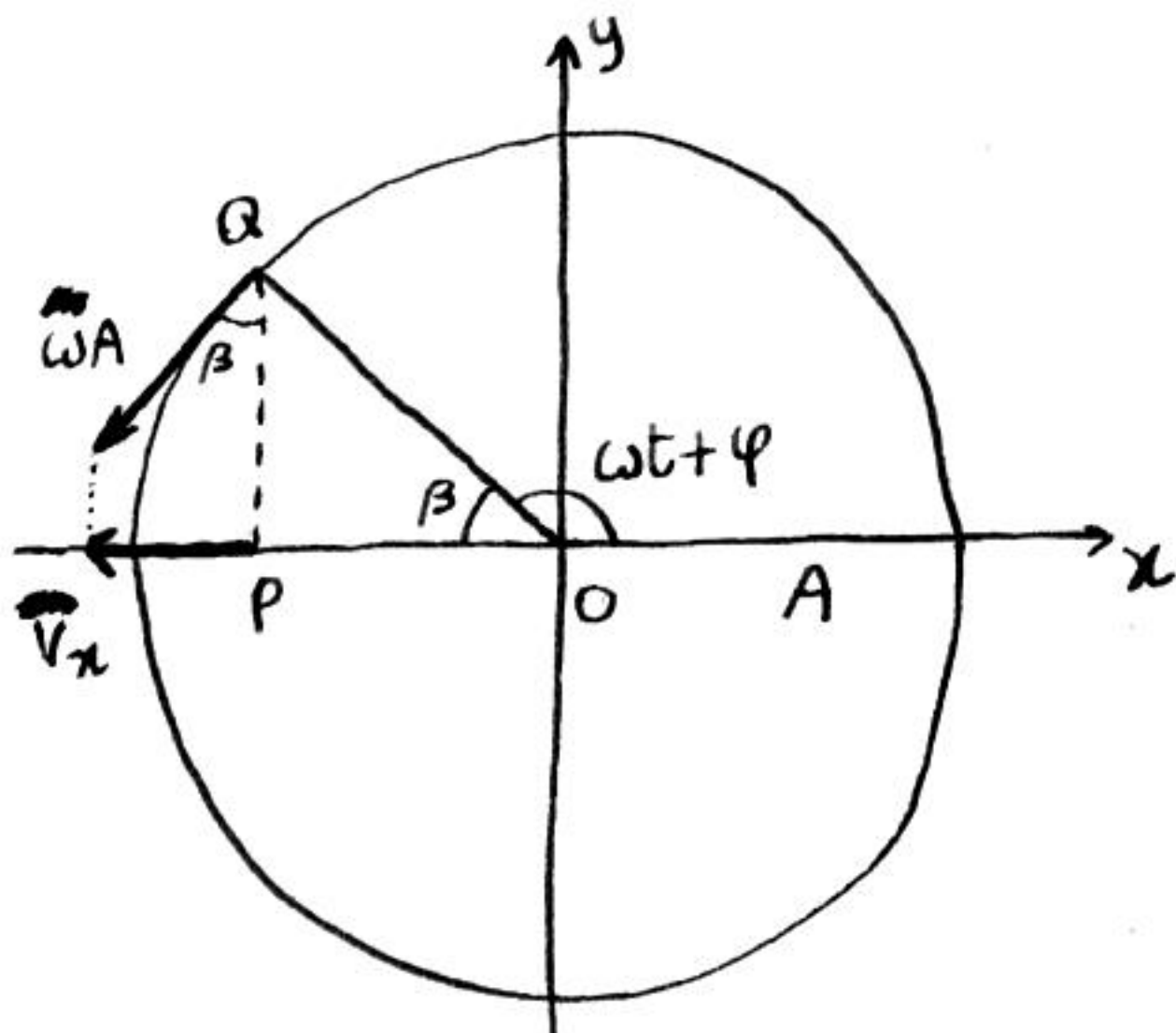
angolo formato da $\overline{OQ}$ con l'asse x al tempo t

Costante di fase φ

angolo formato da $\overline{OQ}$ con l'asse x all'istante di partenza del moto (a $t=0$)

ampiezza A

raggio del cerchio di rif.



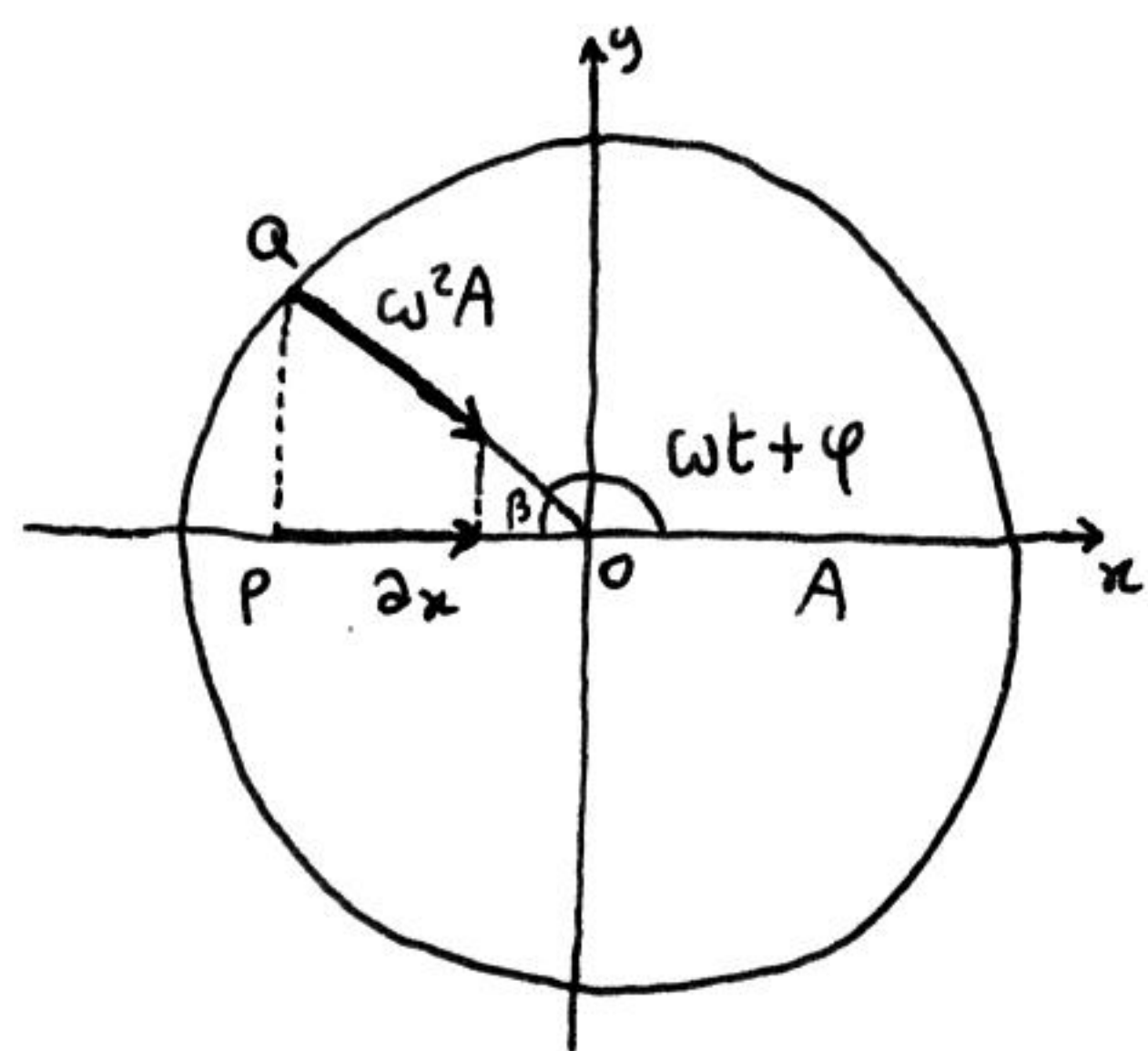
La velocità tangenziale di Q è $v = \omega r = \omega A$.

La sua componente lungo l'asse x è

$$v_x = \omega A \sin \beta = \omega A \sin [\pi - (\omega t + \varphi)] = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

negativa perché diretta verso sinistra

proprio come deve essere per il moto armonico semplice.



L'accelerazione centripeta di Q è $\frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r = \omega^2 A$.

La sua componente lungo l'asse x è

$$a_x = \omega^2 A \cos \beta = \omega^2 A \cos(\pi - (\omega t + \varphi)) = \\ = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

proprio come deve essere per il moto armonico semplice.

Se avessimo considerato le proiezioni del punto sull'asse y, l'equazione del moto sarebbe stata $y = A \sin(\omega t + \varphi)$.

Si tratta nuovamente di un moto armonico semplice; differisce solo in fase dal precedente, in quanto $\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$.

Anche potremo effettuare le proiezioni su qualunque diametro.

Inversamente, possiamo ottenere un moto circolare uniforme dalla composizione di due moti armonici semplici aventi uguale ampiezza e frequenza e una differenza di fase di $\frac{\pi}{2}$ ($= 90^\circ$).

Per tale moto otteniamo i valori r , v e a da:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)} = \sqrt{A^2} = A$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)} = \omega A = \omega r$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\omega^4 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \omega^4 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)} = \omega^2 A = \frac{v^2}{r}$$

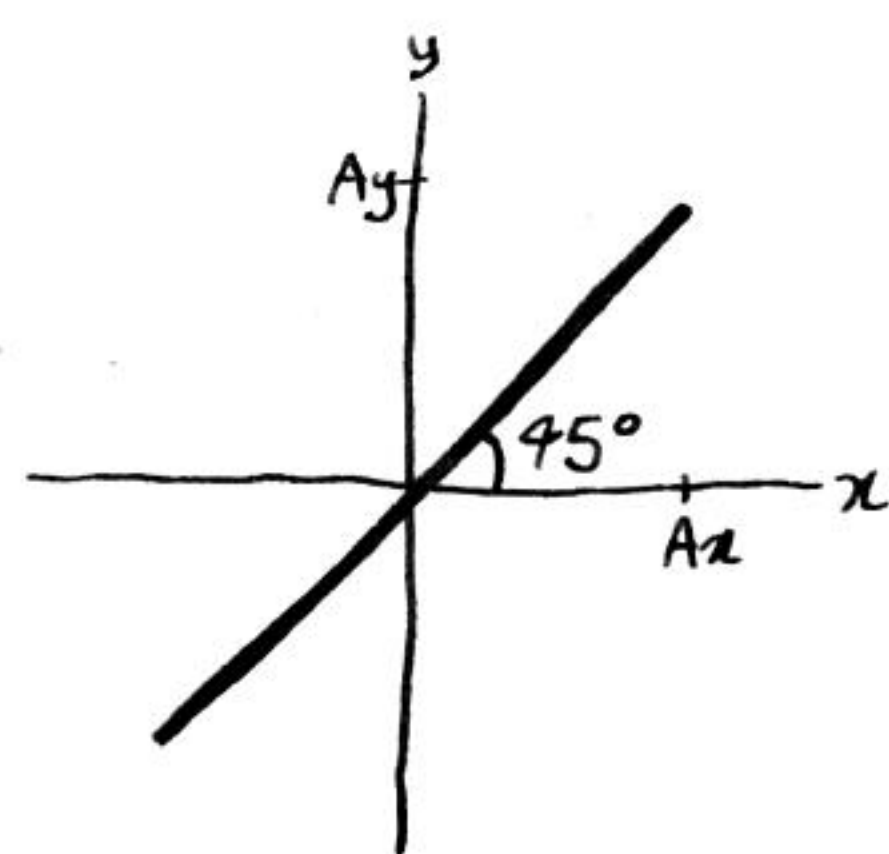
proprio come deve essere per il moto circolare uniforme.

Combinazione di due moti armonici semplici rettilinei ortogonali fra loro e di uguale frequenza: la traiettoria che ne deriva è sempre ellittica (con retta e cerchio casi particolari dell'ellisse).

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x)$$

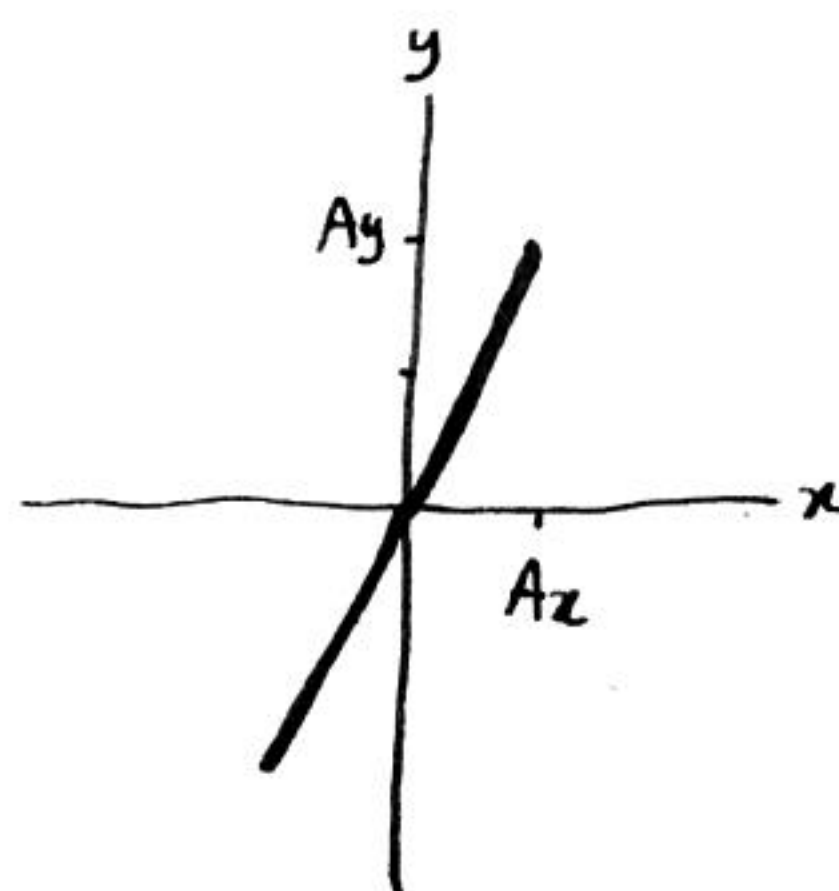
$$y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

Se i due moti hanno uguale fase, la traiettoria risultante è una retta di equazione $y = \frac{A_y}{A_x} x$ come si ricava dividendo tra loro le due equazioni.



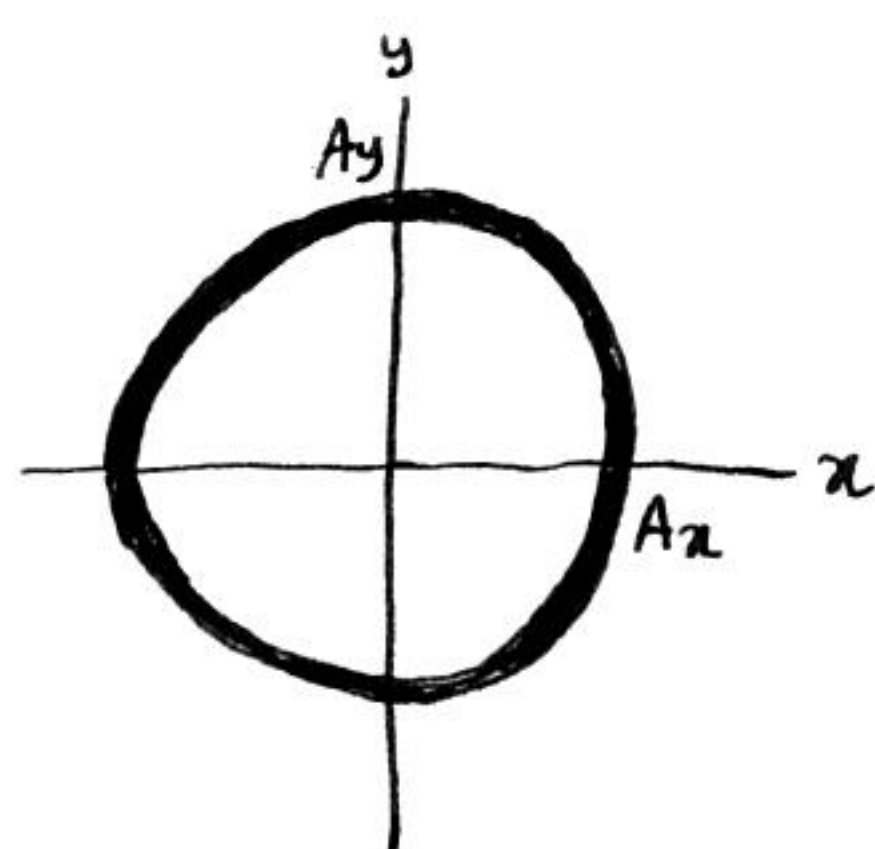
$$A_x = A_y$$

$$\varphi_x = \varphi_y$$



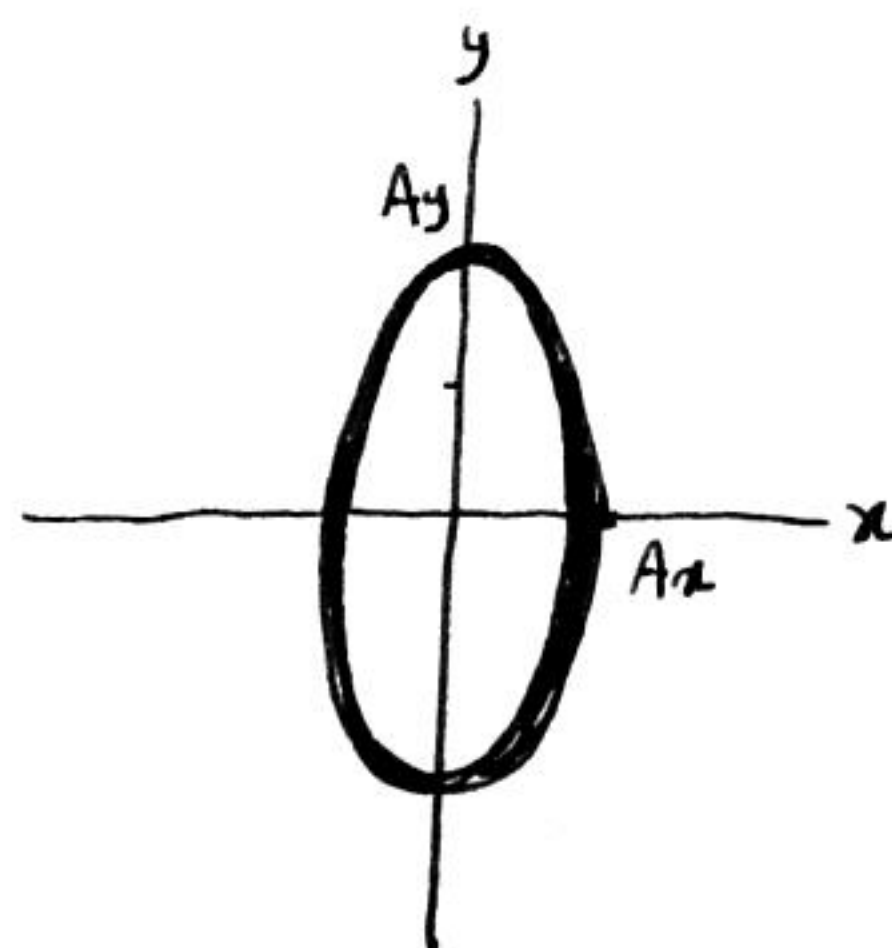
$$A_x = \frac{1}{2} A_y$$

$$\varphi_x = \varphi_y$$



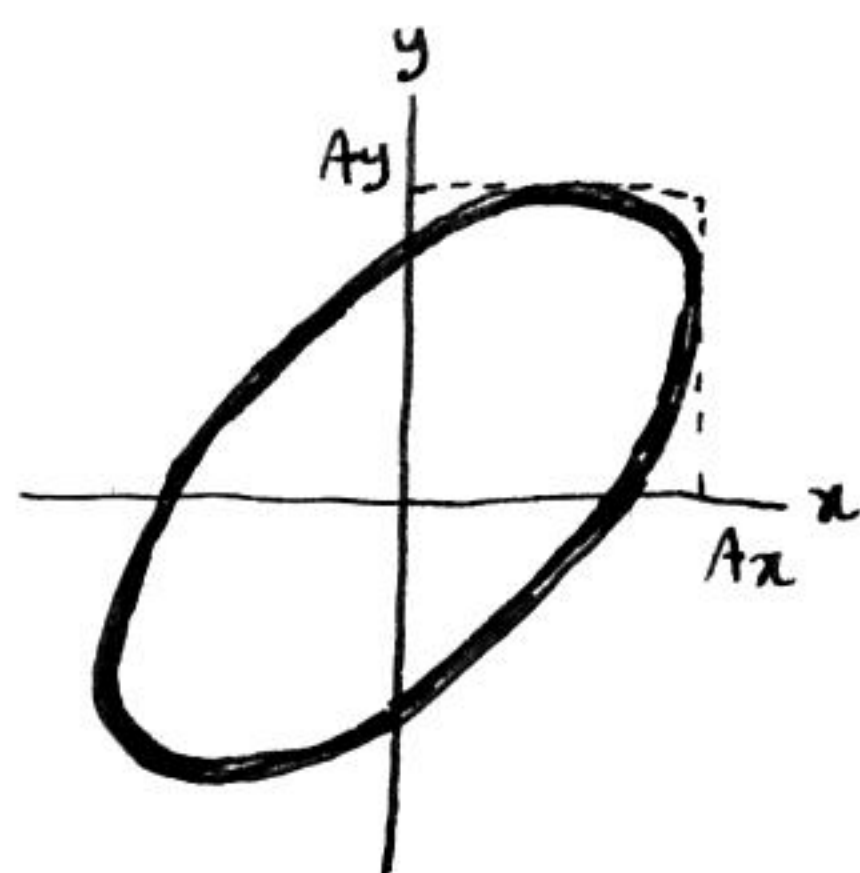
$$A_x = A_y$$

$$\varphi_x = \varphi_y + \frac{\pi}{2}$$



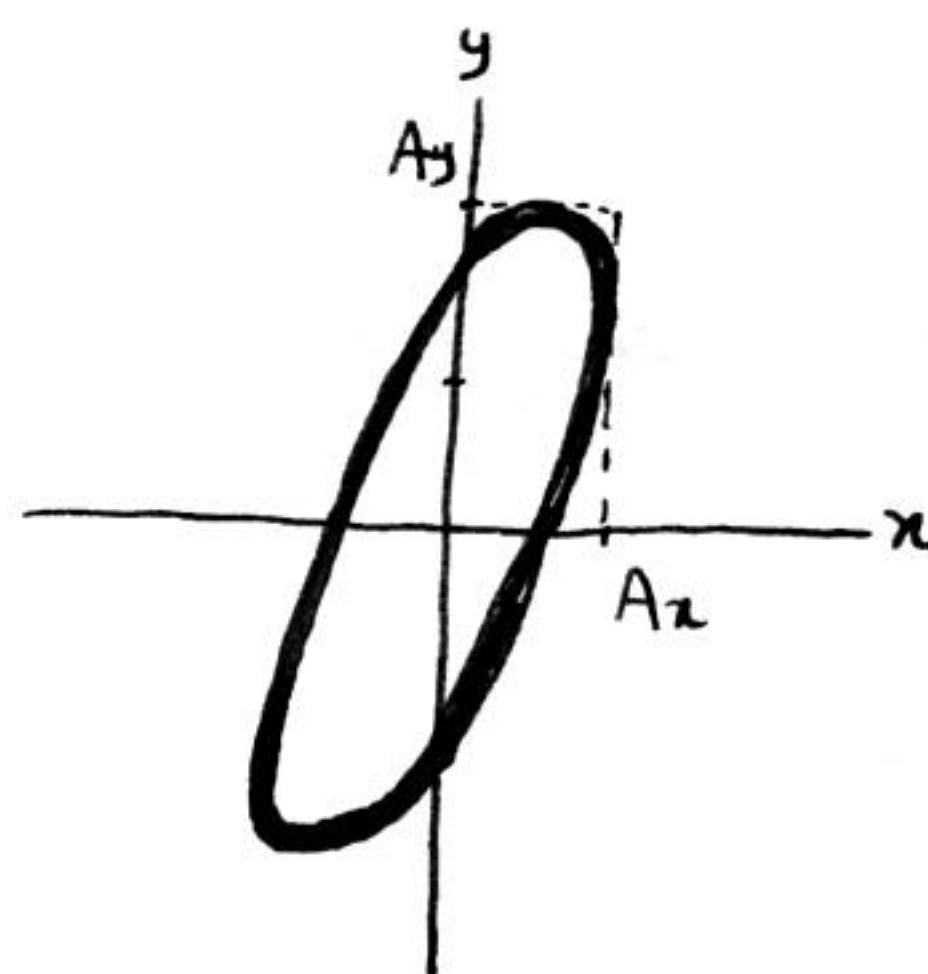
$$A_x = \frac{1}{2} A_y$$

$$\varphi_x = \varphi_y + \frac{\pi}{2}$$



$$A_x = A_y$$

$$\varphi_x = \varphi_y - \frac{\pi}{4}$$



$$A_x = \frac{1}{2} A_y$$

$$\varphi_x = \varphi_y - \frac{\pi}{4}$$

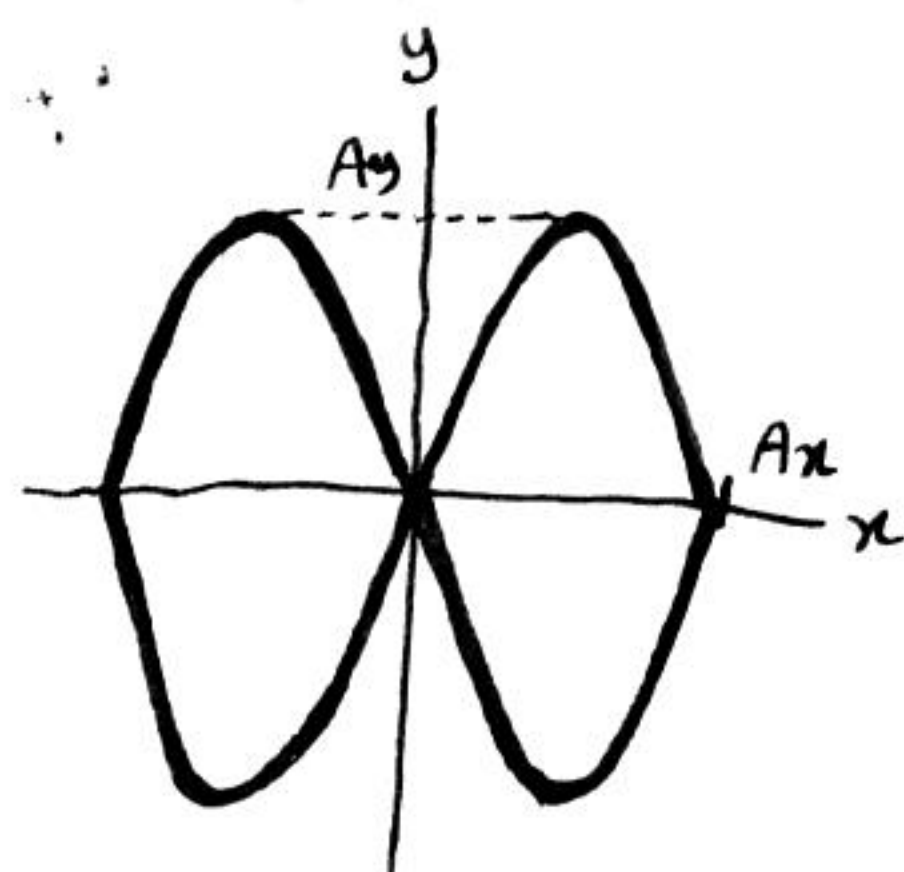


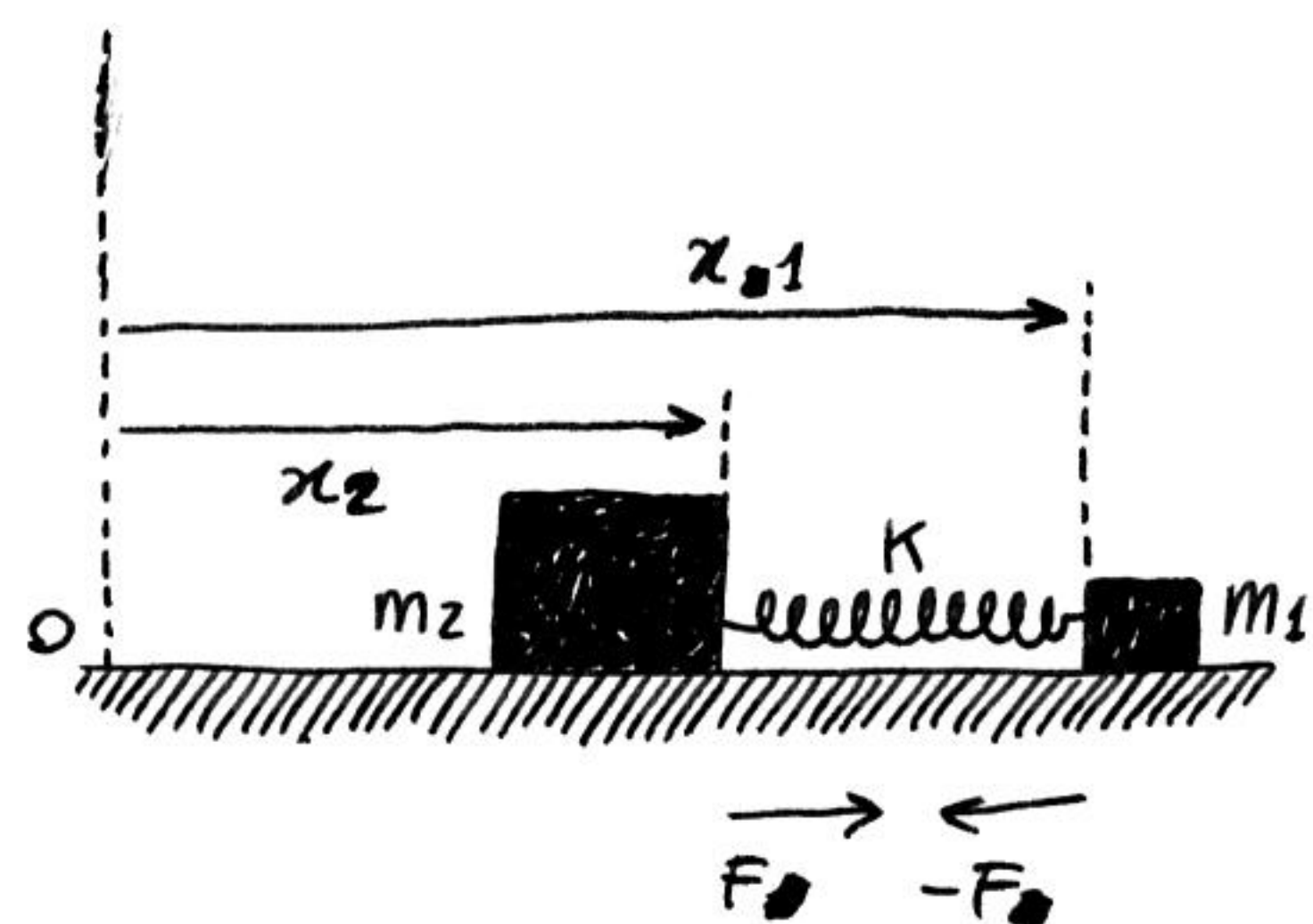
FIGURE DI LISSAJOUS (combinazione di due moti di diversa frequenza).

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x)$$

$$y = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y)$$

se ω_x e ω_y sono commensurabili (cioè se $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ è un numero razionale) la curva è chiusa e il moto si ripete dopo un certo intervallo di tempo.

SISTEMI OSCILLANTI A DUE CORPI



la molla a riposo e' lunga l

in ogni istante, la lunghezza della molla e' $(x_1 - x_2)$

la variazione della molla e' $x = (x_1 - x_2) - l$;

se $x > 0$, la molla e' allungata

se $x < 0$, la molla e' compressa

se $x = 0$, la molla e' a riposo

$-F$ e' la forza che la molla esercita su m_1

e F e' la forza che esercita su m_2

Dalla $F = -kx = ma$ abbiamo: (consideriamo $x > 0$)

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = kx$$

moltiplicando la prima eq. per m_2 e la seconda eq. per m_1 abbiamo:

$$m_2 m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -m_2 kx$$

$$m_1 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = m_1 kx$$

sottraendo la seconda dalla prima abbiamo:

$$m_2 m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - m_1 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -m_2 kx - m_1 kx$$

$$m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) = -(m_1 + m_2) kx$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 (x_1 - x_2)}{dt^2} = -kx$$

chiamiamo $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu$ MASSA RIDOTTA del sistema ;

notiamo che e' $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ e percio' μ e' ~~minore~~ ^{sempre}

minore di m_1 e m_2 .

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{\mu} x = 0$$

questo perche' $x = (x_1 - x_2) - l \rightarrow$

$x + l = (x_1 - x_2)$ con l costante $\rightarrow$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 (x_1 - x_2)}{dt^2}$$

Questa equazione è la solita equazione differenziale del moto armonico semplice già vista in precedenza, e pertanto sappiamo che

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}}$$

Questo è il periodo di oscillazione di due masse legate tra loro con una molla, ed è uguale al periodo di oscillazione di una massa μ attaccata a una molla che sia fissata all'altro estremo (oscillazione di un unico corpo).

Possiamo calcolare v e a nel solito modo, ricordando però che qui denotano velocità e accelerazione relativa di un blocco rispetto all'altro.

MOTO ARMONICO SMORZATO

Quando su un oscillatore armonico agisce una forza d'attrito, le ampiezze del moto diminuiscono finché il corpo non cessa di oscillare.

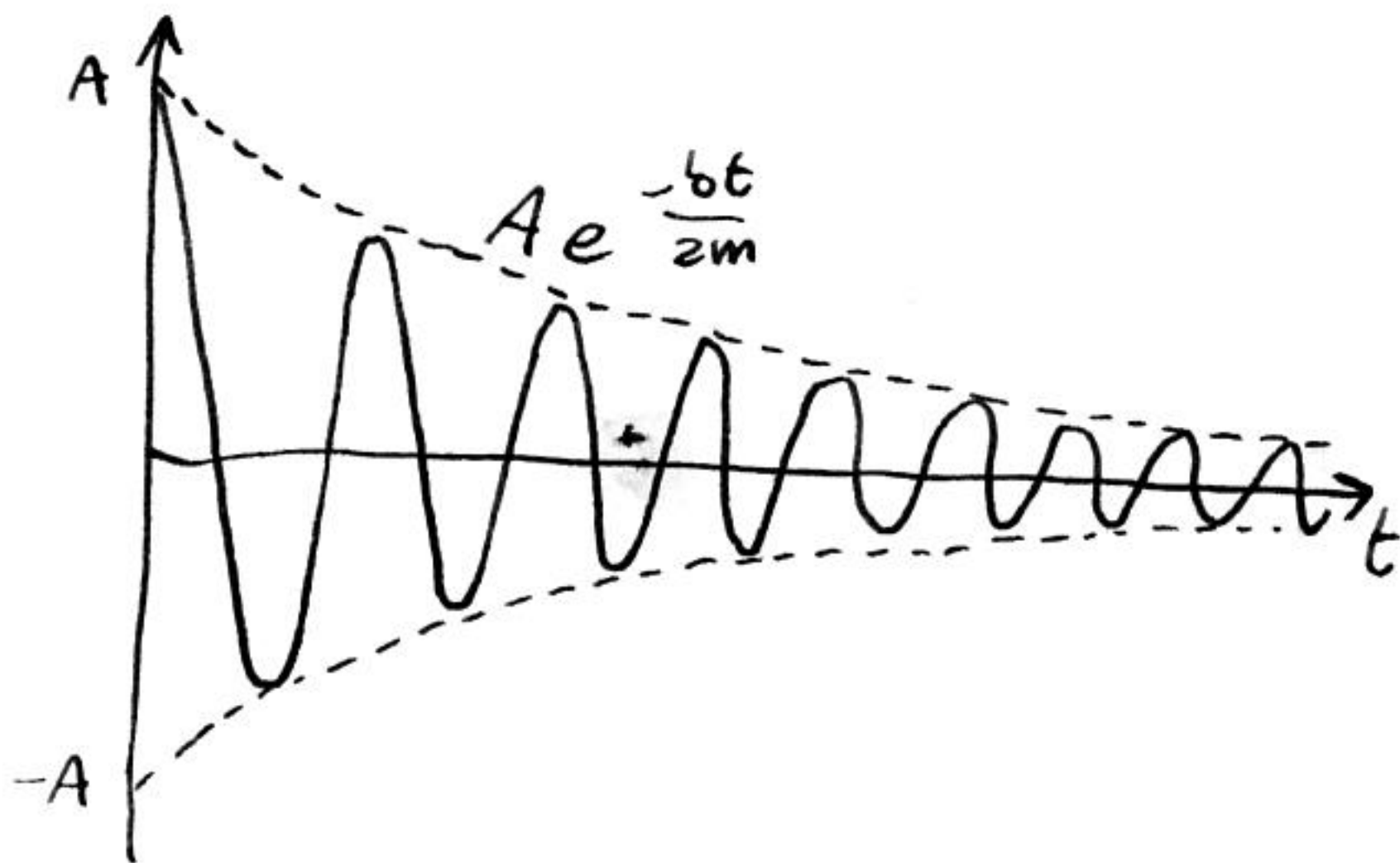
Consideriamo $-bv = F_{\text{attrito}}$ (b è piccolo, altrimenti le seguenti equazioni non sono più valide; se b è grande, l'oscillatore viene fermato ~~immediatamente~~ subito dall'attrito)

$$F = ma \rightarrow -kx - bv = ma$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

La soluzione di questa eq. differenziale è

$$x = A e^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega' t + \varphi) \quad \text{dove} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$



L'intervallo di tempo τ durante il quale l'ampiezza ~~decade~~ decresce di un fattore $1/e$ si chiama VITA MEDIA dell'oscillazione;

$$\tau = \frac{2m}{b}$$

$$E_0 = \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$\frac{E}{\Delta E} = \frac{\tau}{T} = \frac{\tau \omega_0}{2\pi} = Q$$

FATTORE DI QUALITÀ

numero di oscillazioni compiute prima che la sua potenza si riduca di un fattore E

OSCILLAZIONI FORZATE e RISONANZA

$$m\ddot{x} = F = -kx - b\dot{x} + F_e$$

$$F_e = F_0 \sin \omega t$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \omega t$$

$$\frac{b}{m} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$\frac{F_0}{m} = \alpha$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x - \alpha \sin \omega t = 0 \quad [1]$$

Soluzione del tipo $x = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$

$$x'_0 = x_0 \cos \varphi \quad x''_0 = x_0 \sin \varphi$$

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi) = x_0 \cos \varphi \sin \omega t + x_0 \sin \varphi \cos \omega t = x'_0 \sin \omega t + x''_0 \cos \omega t$$

$$\frac{dx}{dt} = x'_0 \omega \cos \omega t - x''_0 \omega \sin \omega t$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x'_0 \omega^2 \sin \omega t - x''_0 \omega^2 \cos \omega t$$

Sostituendo nella [1]

$$-x'_0 \omega^2 \sin \omega t - x''_0 \omega^2 \cos \omega t + \frac{1}{\gamma} x'_0 \omega \cos \omega t - \frac{1}{\gamma} x''_0 \omega \sin \omega t + \omega_0^2 x'_0 \sin \omega t + \omega_0^2 x''_0 \cos \omega t - \alpha \sin \omega t = 0$$

$$\left(-x'_0 \omega^2 - \frac{1}{\gamma} x''_0 \omega + x'_0 \omega_0^2 - \alpha\right) \sin \omega t + \left(-x''_0 \omega^2 + \frac{1}{\gamma} x'_0 \omega + x''_0 \omega_0^2\right) \cos \omega t = 0$$

i termini fra parentesi non dipendono dal tempo e devono essere nulli perché l'eq. si annulli

$$-x'_0 \omega^2 - \frac{1}{\gamma} x''_0 \omega + x'_0 \omega_0^2 - \alpha = 0 \quad [2]$$

$$-x''_0 \omega^2 + \frac{1}{\gamma} x'_0 \omega + x''_0 \omega_0^2 = 0 \quad [3]$$

dalla [3] segue che

$$x''_0 (\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{1}{\gamma} x'_0 \omega$$

$$x''_0 = x'_0 \frac{\omega/\gamma}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad [5]$$

dalla [2] segue che

$$-x'_0 (\omega^2 - \omega_0^2) - \frac{1}{\gamma} x''_0 \omega = \alpha \quad [4]$$

Sostituendo nella [4] il valore di x_0'' ricavato dalla [5] si trova x_0'

$$-x_0'(\omega^2 - \omega_0^2) - x_0' \frac{\omega^2/\gamma^2}{\omega^2 - \omega_0^2} = \alpha$$

$$x_0' = \frac{-\alpha}{(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{\omega^2/\gamma^2}{\omega^2 - \omega_0^2}} = \frac{-\alpha(\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \quad [6]$$

Sostituendo nella [5] il valore di x_0' ricavato dalla [6] si trova x_0''

$$x_0'' = \frac{-\alpha(\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \frac{\omega/\gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2)} = \frac{-\alpha \omega/\gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{\omega^2}{\gamma^2}}$$

per $x_0' = x_0 \cos \varphi$ e $x_0'' = x_0 \sin \varphi$ si ha $x_0 = \sqrt{x_0'^2 + x_0''^2}$

$$x_0 = \sqrt{\frac{\alpha^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}]^2} + \frac{\alpha^2(\omega/\gamma)^2}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}]^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega/\gamma)^2}}$$

dalla [5] si ha anche

$$\frac{x_0''}{x_0'} = \frac{x_0 \sin \varphi}{x_0 \cos \varphi} = \tan \varphi = \frac{\omega/\gamma}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

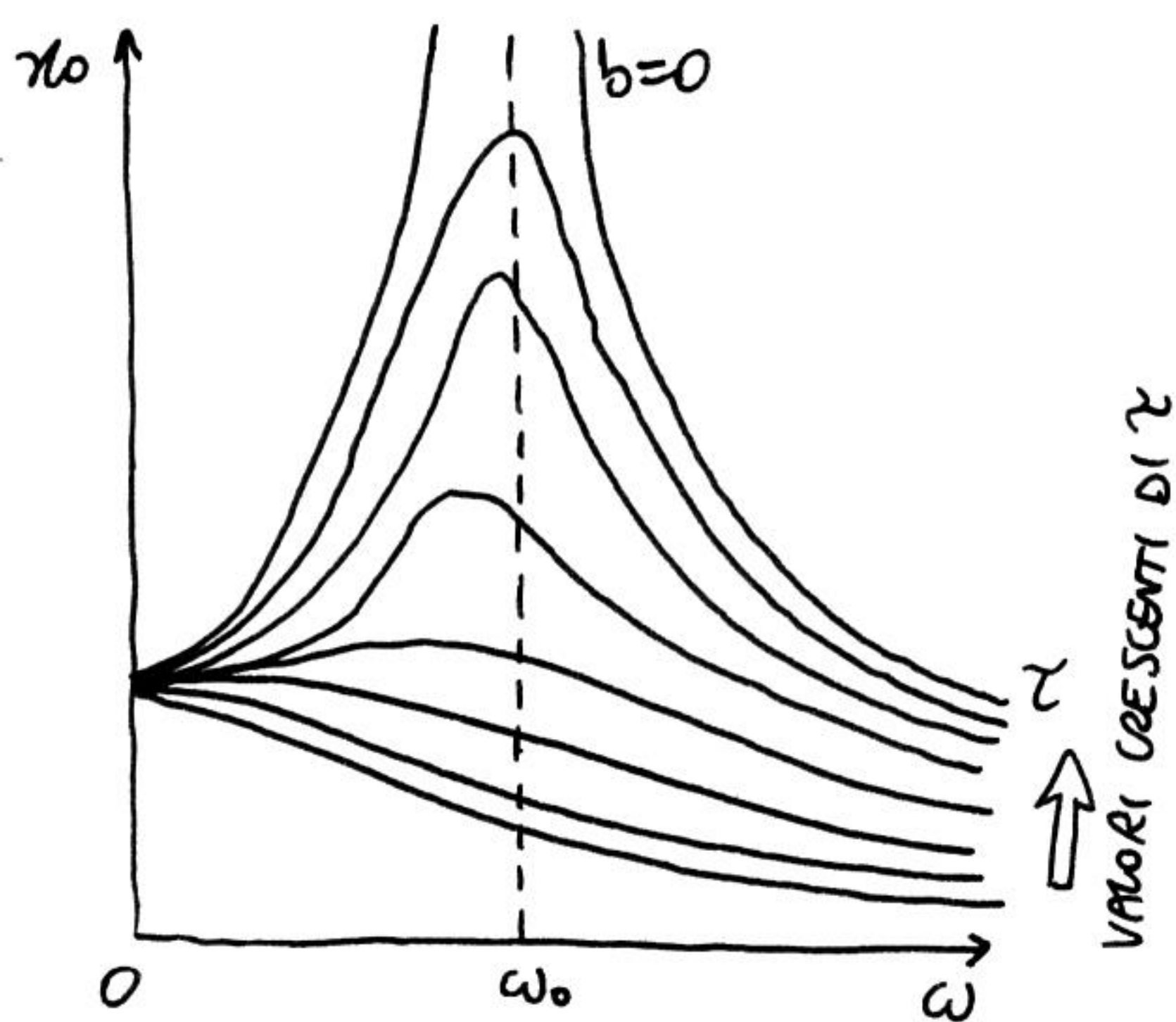
Quando un corpo viene soggetto a una forza esterna periodica, esso compie oscillazioni **FORZATE**, ed oscilla non con la sua frequenza propria, ma con la frequenza della forza esterna.

$$F = -kx - b\dot{x} + F_e$$

↑
legge di Hooke per un
corpo oscillatore armonico semplice

↑
forze d'attrito che
agiscono sul corpo

↑
forza esterna impressa
al corpo



Per gli oscillatori smorzati, ~~meno~~ più la frequenza della forza esterna è vicina alla frequenza naturale del corpo (la frequenza alla quale oscillerebbe il corpo se venisse lasciato a se stesso), più è grande l'ampiezza di oscillazione; questa coincidenza delle due frequenze si chiama RISONANZA.

Grafico dell'ampiezza x_0 di una oscillazione armonica forzata in funzione della frequenza ω della forza agente. ω_0 = frequenza naturale del corpo, $\tau = \frac{2m}{b}$ ($\text{c} \frac{m}{b}$?). Per valori crescenti di τ (e di diminuire cioè dell'attrito b), l'ampiezza aumenta ed ~~ha~~ ha un picco massimo in prossimità della zona di risonanza. Per $b=0$ l'ampiezza $\rightarrow \infty$ (in realtà un certo smorzamento è sempre presente, per cui l'ampiezza assume sempre un valore finito).

Un ponte può venire distrutto da una leggera brezza, se questa ha frequenza vicina alla frequenza naturale del ponte.

16 GRAVITAZIONE

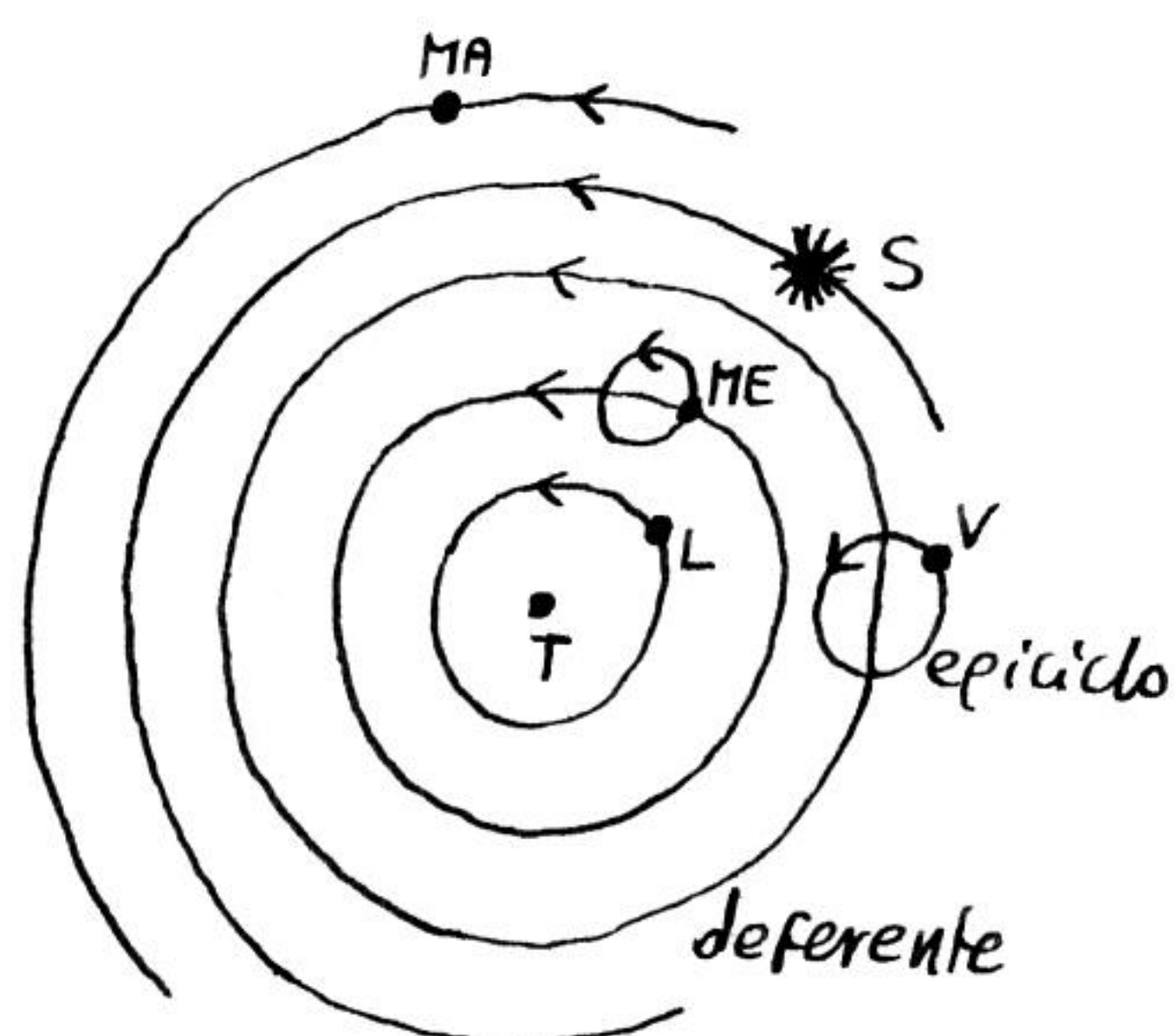
Tre campi generali che riguardano la gravitazione:

- 1) Attrazione tra oggetti sulla Terra (debolissima)
- 2) Attrazione della Terra su un oggetto (media)
- 3) Attrazione tra corpi celesti (forte)

} Newton per primo trattò questi problemi come differenti aspetti dello stesso problema (gravitazione), soggetti alle medesime leggi

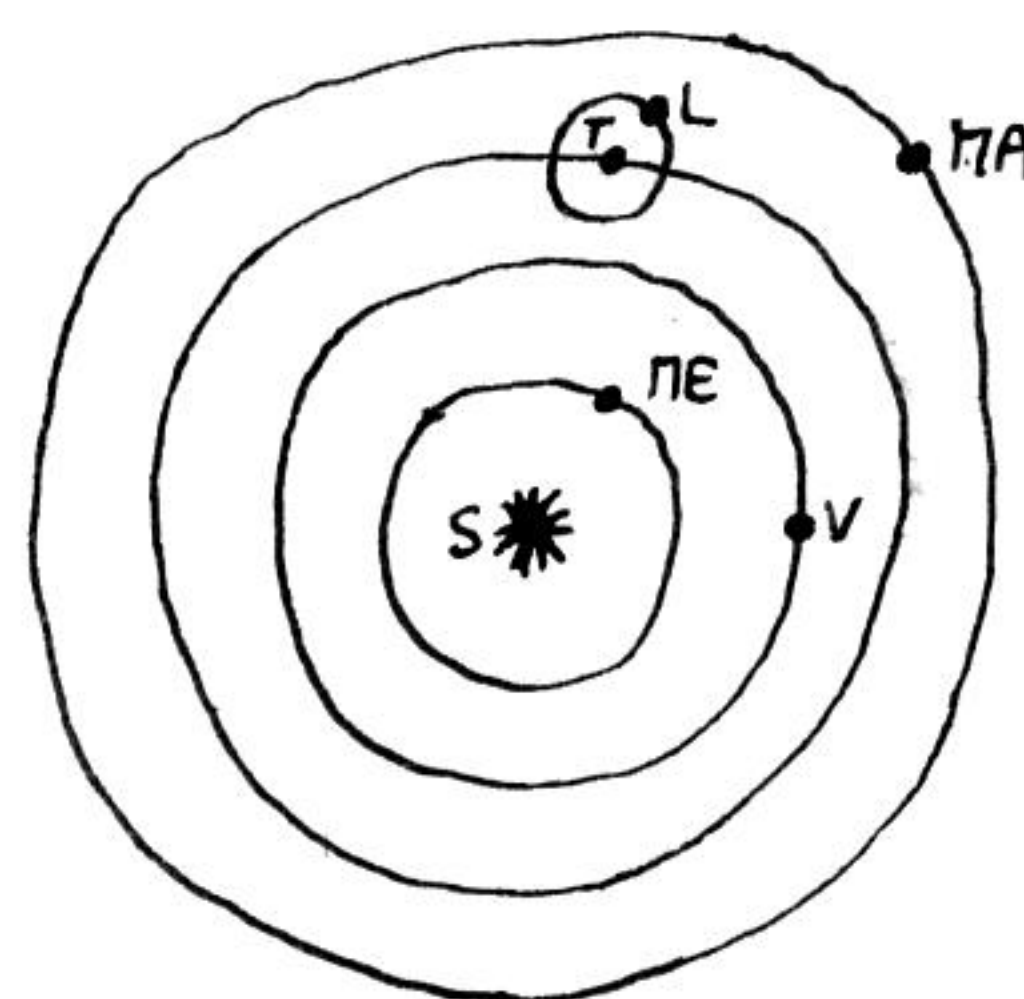
• TOLOMEI (200 d.C.)

Schema geocentrico del sistema solare (orbite = cerchi)



• COPERNICO (1473)

Schema eliocentrico inerziale del sistema solare, più utile per lo studio del moto dei pianeti (orbite = cerchi)



• BRAHE (1546)

ricava dati dall'osservazione dei pianeti

• KEPLERO (1571)

leggi empiriche sul moto dei pianeti:

- 1) I pianeti si muovono su orbite ellittiche aventi il Sole in uno dei fuochi
- 2) Il segmento Sole-pianeta spazza aree uguali in tempi uguali
- 3) Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta attorno al Sole è proporzionale al cubo della distanza del pianeta dal Sole

• NEWTON (1642)

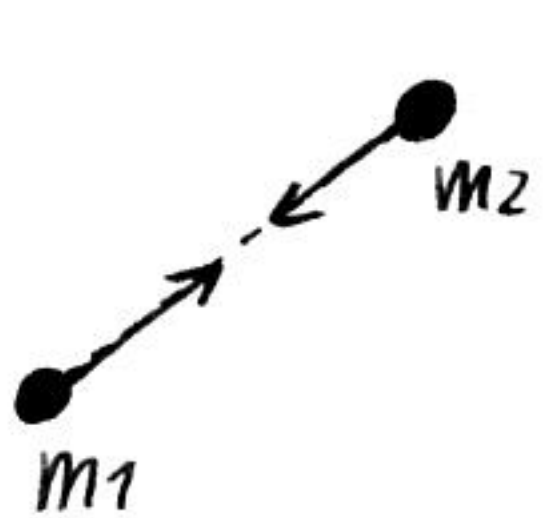
scopre le leggi generali del moto dei pianeti (confermando le 3 leggi di Keplero) e la legge di gravitazione universale, usando il concetto di forza.

Per primo ipotizzò che si potesse considerare la massa di un corpo esteso come concentrata nel suo centro (~~ovvero~~ nel caso che il corpo sia una sfera uniforme)

LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Tra due particelle di massa m_1 e m_2 poste a distanza r viene esercitata una forza attrattiva agente lungo la congiungente ~~tra~~ delle due particelle e avente modulo $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$

dove $G =$ costante di gravitazione universale $= 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2}$



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

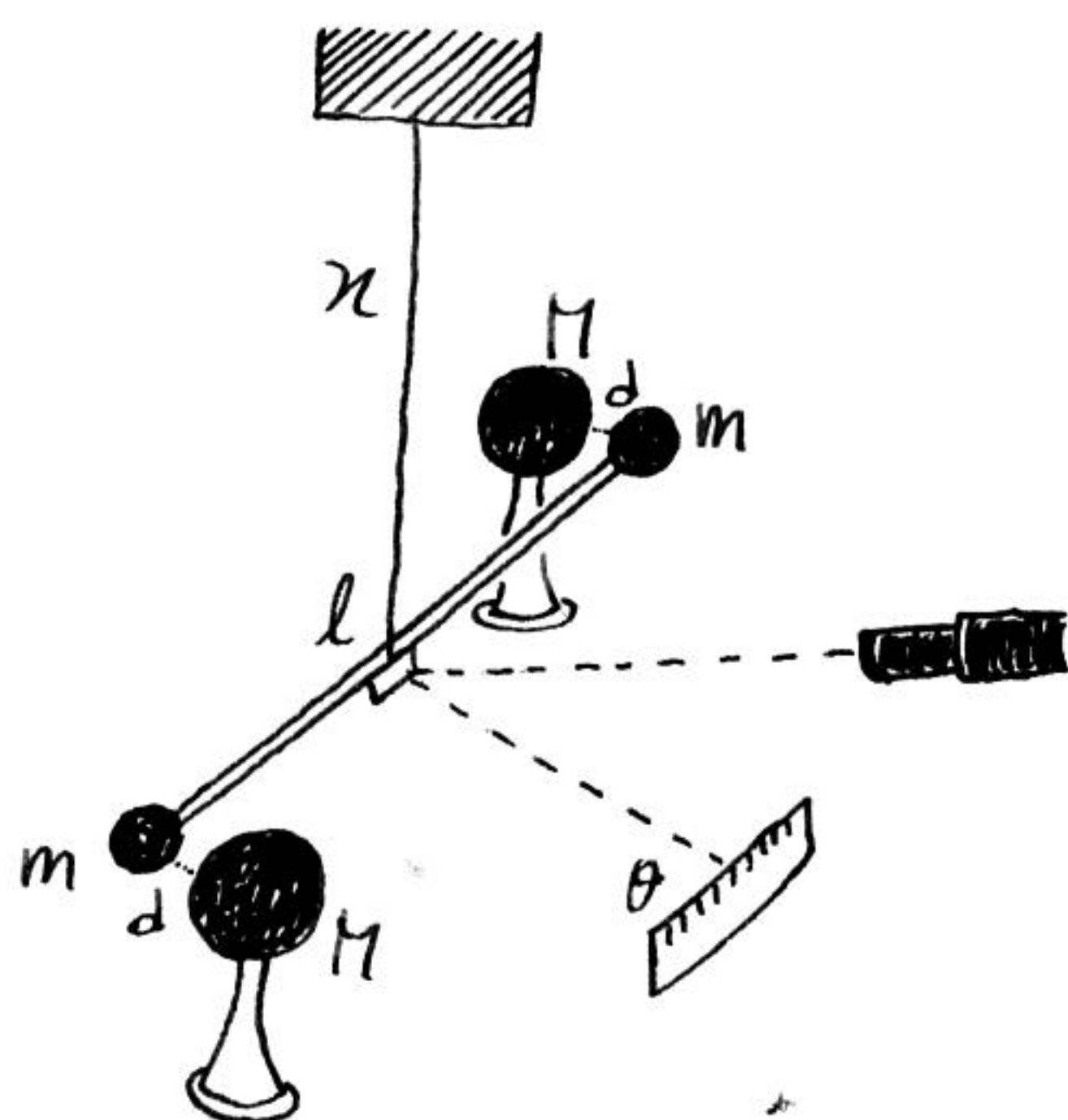
e' una coppia azione - reazione

La prima misura della costante G fu effettuata nel 1798 da Lord Cavendish utilizzando la **BILANCA DI CAVENDISH**.

Due sferette di massa

~~due sferette~~ m sono fissate agli estremi di un manubrio leggero di lunghezza l , sospeso al centro ad un filo di costante di torsione κ .

Due grandi masse M sono poste accanto a ciascuna delle altre sferette, a distanza d e in direzione opposta l'una all'altra. Le due grandi masse attirano le piccole facendo ruotare il manubrio; il filo si oppone alla torsione. E' possibile ~~misurare~~ misurare lo spostamento del manubrio dallo spostamento θ di un fascio di luce su una linea graduata, fascio prodotto da una sorgente e riflesso da uno specchietto fisso al manubrio.



(le masse m e M sono sferiche e la loro congiungente d e' perpendicolare al manubrio l).
Il filo ruota in senso antiorario (visto dall'alto)

Se non conosciamo κ , possiamo ricavarlo dal periodo di oscillazione torsionale del manubrio:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad \text{dove } I = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

La forza agente su ciascuna sferetta e' $F = G \frac{mM}{d^2}$; il momento della forza agente sul filo e' quindi $\tau = 2F \frac{l}{2} = G \frac{mM}{d^2} l$.

Essendo $\tau = \kappa \theta$, conoscendo anche θ possiamo ricavare il valore di G .

Dal valore di G possiamo anche conoscere la massa della Terra.

La forza di attrazione della Terra su un oggetto di massa m e' data sia da $F = mg$ sia da $F = G \frac{mM_T}{R_T^2}$. Ossia $mg = G \frac{mM_T}{R_T^2} \rightarrow M_T = \frac{g R_T^2}{G}$.

m = massa oggetto

M_T = massa terra

g = gravita' = $9,8 \text{ m/s}^2$

R_T = raggio terrestre = 6378 km

otteniamo $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

MASSA INERZIALE E GRAVITAZIONALE

Se proviamo a spingere un blocco lungo un piano orizzontale senza attrito, notiamo che ciò richiede uno sforzo. Qui la gravità non c'entra; occorrerebbe lo stesso sforzo per muovere il blocco nello spazio in un luogo a gravità zero. E' la massa del blocco che richiede che, per spostarlo, venga applicata una forza $\vec{F} = m\vec{a}$ dove m = massa inerziale del blocco.

Per tenere sospeso lo stesso blocco in un luogo con gravità g , dobbiamo applicare una forza verso l'alto $F = G \frac{m' M_T}{R_T^2}$ (supposto che il luogo sia sulla Terra, M_T e' la massa e R_T il raggio della Terra), dove m' = massa gravitazionale del blocco.

Massa inerziale e massa gravitazionale sono la stessa cosa?

Consideriamo tre particelle A, B e C di masse gravitazionali m_a , m_b e m_c ; A e B stanno alla stessa distanza r da C.

La forza gravitazionale esercitata da C su A e' $F_{CA} = G \frac{m_a m_c}{r^2}$ e quella esercitata su B e' $F_{CB} = G \frac{m_b m_c}{r^2}$. Quindi si ha $\frac{F_{CA}}{F_{CB}} = \frac{m_a}{m_b}$.

Se ora il corpo C e' la Terra, si ha che le forze F_{CA} e F_{CB} sono i pesi delle particelle A e B, ovvero $\frac{P_A}{P_B} = \frac{m_a}{m_b}$. Quindi i pesi di corpi diversi (nello stesso luogo della Terra) sono proporzionali alle masse gravitazionali di tali corpi.

Adesso, consideriamo le particelle A e B che hanno massa inerziale (misurata con un dinamometro) m_a e m_b .

Lasciamole cadere e misuriamo le loro accelerazioni. Sappiamo che corpi di diversa massa cadono sulla Terra con la stessa ~~stessa~~ accelerazione g , che deriva dall'attrazione gravitazionale terrestre, che e' il loro peso. Perciò $P_A = m_a g$ e $P_B = m_b g$, quindi si ha $\frac{P_A}{P_B} = \frac{m_a}{m_b}$.

In conclusione, $\frac{m'_a}{m'_b} = \frac{m_a}{m_b}$ cioè massa gravitazionale e inerziale di un corpo sono proporzionali tra loro. Di fatto sappiamo che sono anche identiche.

Newton compì un esperimento col pendolo ($T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell}{m'g}}$) utilizzando, come grave, diverse sostanze di peso uguale; si sarebbero avute differenze di periodo solo per cambiamenti delle masse inerziali. Ma Newton ottenne sempre $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$, ciò che ne ricavò $m = m'$.

VARIAZIONI DELLA GRAVITA' DOVUTE ALL' ALTEZZA

[qui $m_2 = \text{Terra}$]

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad dF = -2G \frac{m_1 m_2}{r^3} dr \quad \rightarrow \quad \frac{dF}{F} = -2 \frac{dr}{r}$$

$$F = m_1 g \quad dF = m_1 dg \quad \rightarrow \quad \frac{dF}{F} = \frac{dg}{g}$$

per cui $\frac{dg}{g} = -2 \frac{dr}{r}$ cioè la variazione relativa della gravità è doppia della

variazione relativa dell'altezza (ed è negativa, perché aumentando di altezza la gravità diminuisce).

Es.: sollevandosi di 16 km dalla superficie, r passa da 6400 a 6416 km con una variazione di $1/400$; la variazione della gravità deve perciò essere di $-1/200$, cioè g passa da $0,980 \text{ m/s}^2$ a $0,975 \text{ m/s}^2$.

VARIAZIONI DELLA GRAVITA' DOVUTE ALLA LATITUDINE

Si considera la Terra come una GEOIDE (un'ipotetica superficie chiusa coincidente col livello del mare e, sotto i continenti, col prolungamento del livello del mare; è una superficie equipotenziale gravitazionale e un filo a piombo è perpendicolare a essa in ogni punto)

raggio terra all'equatore = raggio terra ai poli + 21 km

Tale deformazione è dovuta alla forza centrifuga dovuta alla rotazione ~~lente~~ della Terra, che è un corpo plastico.

Procedendo dai poli all'equatore, la gravità diminuisce, perché ~~diminuisce~~ aumenta il raggio terrestre e quindi la distanza dal centro della Terra.

$$g_{\text{equatore}} = 9,78 \text{ m/s}^2$$

$$g_{\text{polo N}} = 9,83 \text{ m/s}^2$$

In realtà il 50% di questa variazione è dovuto ~~alla~~ alla forza centrifuga agente sugli oggetti, dovuta alla rotazione terrestre, e che è massima all'equatore e nulla ai poli.

VARIAZIONI DELLA GRAVITA' DOVUTE ALLA ROTAZIONE TERRESTRE

Poiché la Terra è un corpo in rotazione, su un oggetto posto sulla sua superficie agisce una forza centrifuga diretta radialmente verso l'asse di rotazione.

Ne consegue che l'attrazione di un corpo verso il centro della Terra è minore dell'attrazione gravitazionale che la Terra esercita su esso.

All'equatore tale forza è massima, e si ha

$$mg = G \frac{M_t m}{R_t^2} - m a_c$$

$$g = G \frac{M_t}{R_t^2} - a_c$$

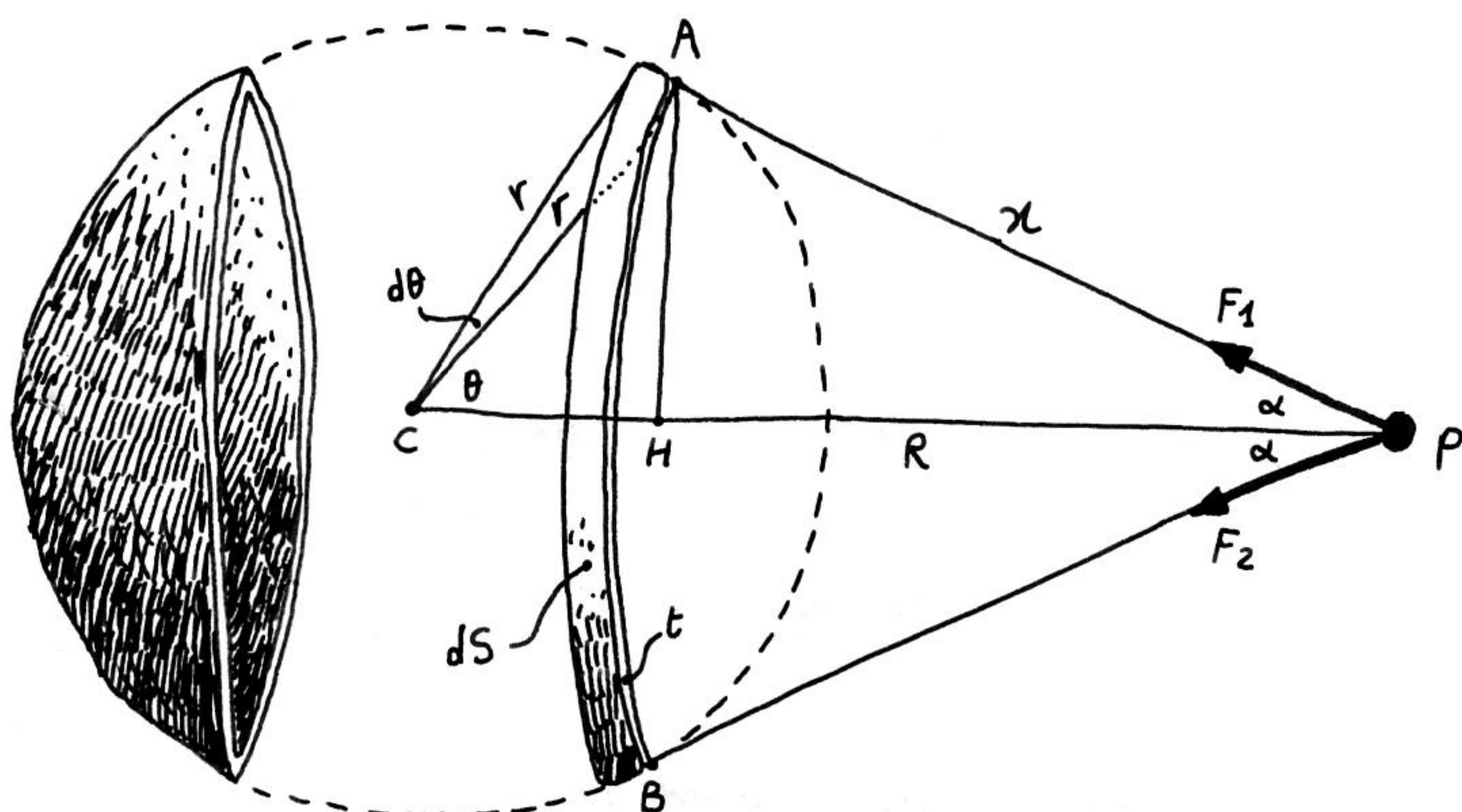
dove a_c = accelerazione centrifuga = $\omega^2 R_t = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_t$ (supposta la Terra sferica)

Utilizzando i dati conosciuti, si ottiene ~~che~~ $a_c = 0,0336 \text{ m/s}^2$;

si vede che tale effetto è la causa al 50% della variazione della gravità con la latitudine.

Tale forza centrifuga è max all'equatore e diminuisce con la latitudine, fino a essere nulla ai poli. (È sempre diretta perpendicolarmente all'asse di rotazione, mentre la gravità è sempre diretta verso il centro, perciò il problema andrebbe risolto in due dimensioni).

Una massa sferica attrae particelle fuori di essa, come se tutta la sua massa fosse concentrata nel suo centro.



Dimostrazione:

Consideriamo un guscio cavo di spessore t piccolo rispetto al raggio r , il cui centro C sia a distanza R da una particella esterna P di massa m .

Consideriamo una striscia circolare di larghezza $r d\theta$ ~~inseguita~~. Ogni particella della striscia attrae la particella P con una forza, la cui componente verticale si annulla perché sommata con la forza di attrazione di una particella che stia nella parte opposta della striscia; perciò tutte le componenti verticali di tali forze si annullano e si ~~considerano~~ considerano solo le componenti orizzontali $F_1 \cos \alpha$ e $F_2 \cos \alpha$. Tale striscia ds ha dunque larghezza $= r d\theta$

spessore $= t$

lunghezza $= 2\pi \overline{AH} = 2\pi r \sin \theta$

volume $= t 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$

massa $dM = \rho t 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$

(considerato $\rho = \text{densità costante}$)

Essa esercita sulla particella P una forza

$$dF = G \frac{m dM}{x^2} \cos \alpha = G \frac{m}{x^2} \rho t 2\pi r^2 \sin \theta \cos \alpha d\theta$$

Si hanno inoltre queste relazioni:

$$1) R - \overline{CH} = x \cos \alpha$$

$$R - r \cos \theta = x \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{R - r \cos \theta}{x}$$

2) dalla legge dei coseni $x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$ $r \cos \theta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2R}$
 e differenziando $2x dx = -(-2Rr) \sin \theta d\theta$ $\sin \theta d\theta = \frac{x dx}{Rr}$

la relazione 1) diventa così $\cos \alpha = \frac{R - r \cos \theta}{x} = \frac{2R^2 - R^2 - r^2 + x^2}{2Rx} = \frac{R^2 - r^2 + x^2}{2Rx}$

Sostituendo tali relazioni nell'equazione, si ha

$$dF = G \frac{m}{x^2} \rho t 2\pi r^2 \cos \alpha \sin \theta d\theta = G \frac{m}{x^2} \rho t 2\pi r^2 \frac{R^2 - r^2 + x^2}{2Rx} \frac{x dx}{Rr} =$$

$$= \frac{\pi G m \rho t r}{R^2} \frac{R^2 - r^2 + x^2}{x^2} dx$$

Si calcola ora la forza totale esercitata da tutte ~~le strisce~~ le strisce, integrando da un estremo all'altro della sfera grande:

$$F = \int_{R-r}^{R+r} \frac{\pi G m \rho t r}{R^2} \left(\frac{R^2}{x^2} - \frac{r^2}{x^2} + 1 \right) dx = \frac{\pi G m \rho t r}{R^2} \int_{R-r}^{R+r} \left(\frac{R^2}{x^2} - \frac{r^2}{x^2} + 1 \right) dx =$$

$$= \frac{\pi G m \rho t r}{R^2} 4r = G \frac{m(4\pi r^2 \rho)}{R^2} = G \frac{mM}{R^2}$$

dove M è la massa totale dello strato.

Questa è la forza interagente tra due particelle di massa M e m poste a distanza R .

Per una sfera piena, si considera questo per ogni strato sferico concentrico (a cipolla) e la dimostrazione è finita.

Strati diversi possono anche avere densità diverse.

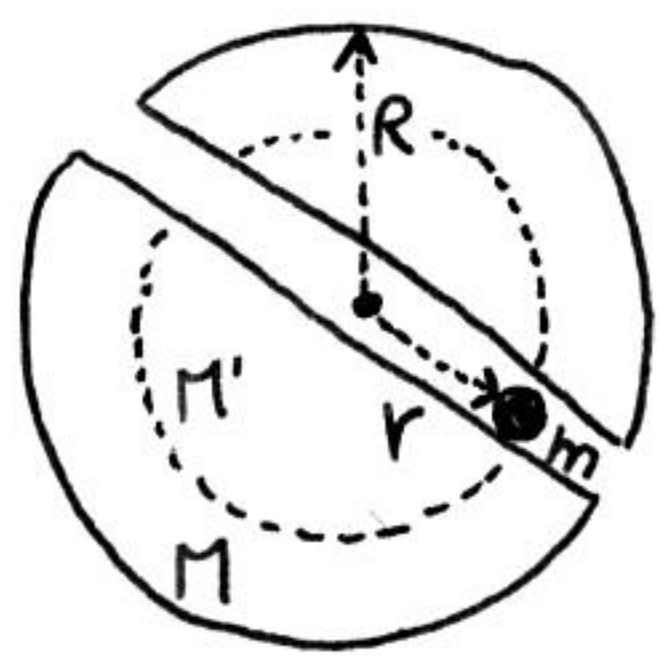
La forza esercitata da uno strato sferico su una particella interna ad esso è nulla

perché $F = \int_{r-R}^{R+r} \left(\frac{R^2}{x^2} - \frac{r^2}{x^2} + 1 \right) dx = 0$



Al centro della Terra la gravità è nulla.

La gravità decresce dalla superficie terrestre, avvicinandosi o allontanandosi dal centro della Terra (se la densità della Terra fosse costante).



Supponiamo di scavare un tunnel che attraversi tutta la Terra lungo il suo diametro. Gettiamo un oggetto nel tunnel.

(Supponiamo ρ = densità Terra = cost.)

L'oggetto si muove di moto armonico semplice.

Quando l'oggetto si trova a distanza r dal centro della Terra, su esso agisce solo l'attrazione della sfera di raggio r ; gli strati esterni del pianeta non hanno effetto su esso. Il corpo è quindi attratto verso il centro con una forza

$$F = -G \frac{M' m}{r^2}$$

dove $M' =$ massa della sfera di raggio $r = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$

$$\text{e perciò } F = -G \frac{4\pi r^3 \rho m}{3r^2} = -\frac{4}{3} G \rho m \pi r$$

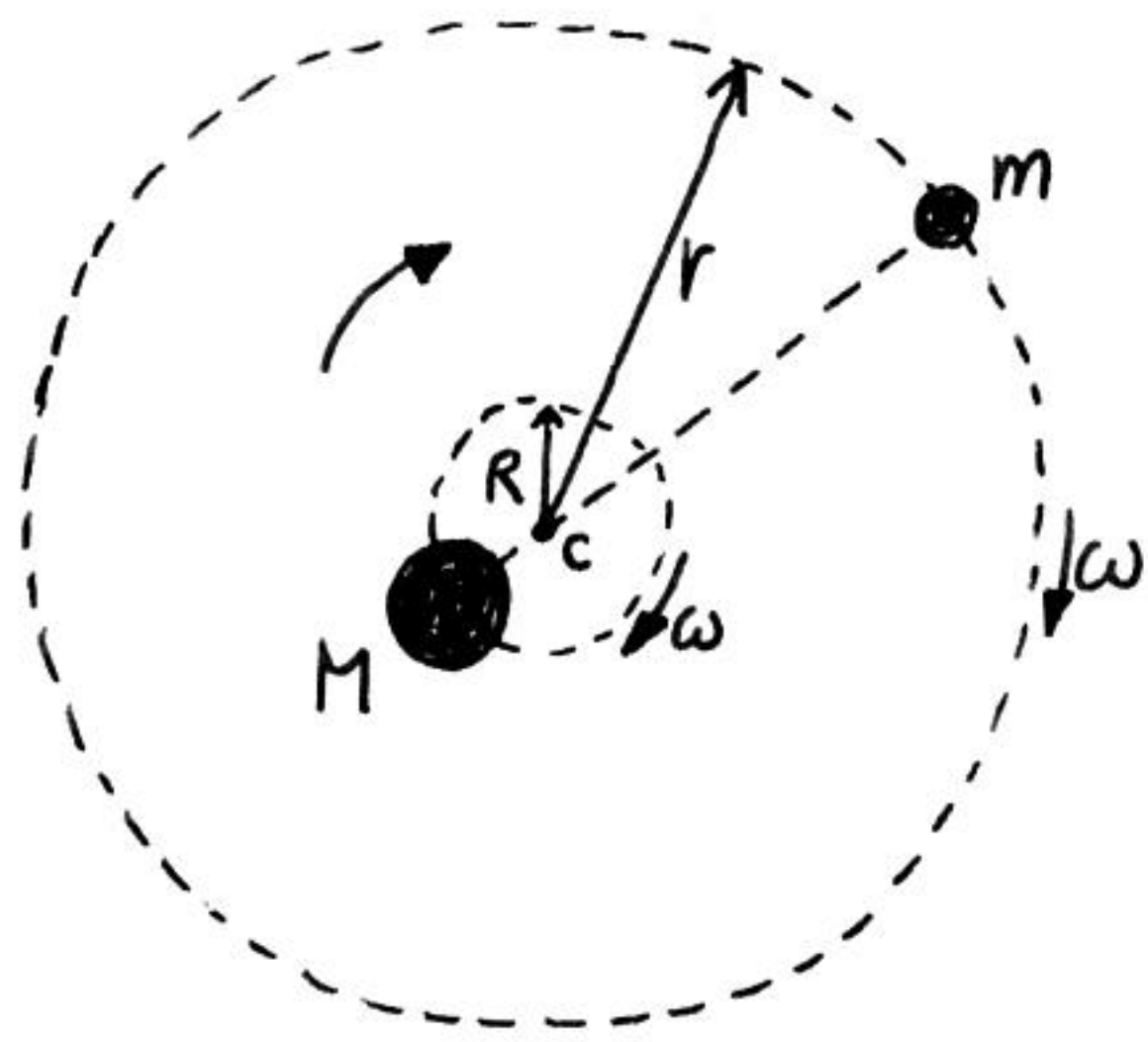
e di là $F = -kr$ (cond. per il moto armonico semplice) per $k = \frac{4}{3} G \rho m \pi$.

Il periodo di tale moto è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{3}{4\pi G \rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G \rho}} = 84 \text{ minuti}$$

L'oggetto perciò percorre tutto il tunnel in 42 minuti.

MOTO DEI PIANETI



Consideriamo due corpi sferici che si muovono in orbite circolari sotto l'influenza delle rispettive forze gravitazionali.

Consideriamo come origine del sistema di coordinate il punto C, centro di massa del sistema:

$$MR = mr.$$

I due corpi M e m si muovono lungo orbite di

raggio costante R e r, con la stessa velocità angolare ω .

Questo perché la forza gravitazionale agente su ciascun corpo deve procurare la accelerazione centripeta necessaria; le forze gravitazionali sono forze di azione e reazione e perciò uguali e opposte; quindi saranno uguali e opposte anche le ~~accelerazioni~~ forze centripete derivanti: $m\omega^2 r$ (forza centripeta di M su m) = $M\omega^2 R$ (forza centripeta di m su M). Ciò è vero perché $mr = MR$.

Affinché uno dei corpi possa mantenersi lungo un'orbita circolare costante, la forza centripeta deve eguagliare la forza di attrazione dell'altro corpo:

$$G \frac{Mm}{(R+r)^2} = m\omega^2 r.$$

Per M molto maggiore di m (nel caso di un sistema sole-planet), R è trascurabile, perciò: (M_s = massa sole) ($\omega = \frac{2\pi}{T}$, dove T = periodo rivoluzione del pianeta)

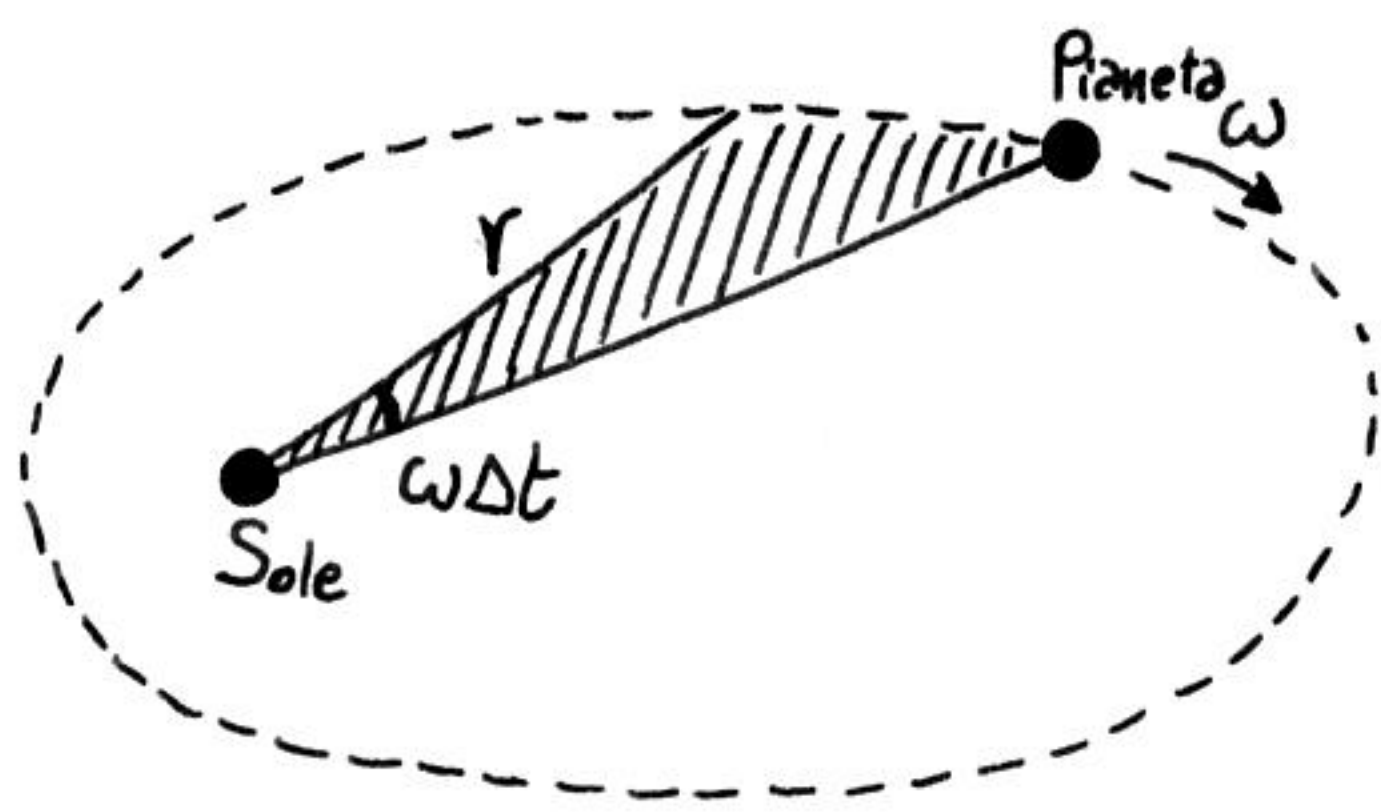
$$G \frac{M_s m}{r^2} = m\omega^2 r \rightarrow G M_s = \omega^2 r^3 \rightarrow \boxed{G M_s = \frac{4\pi^2}{T^2} r^3}$$

questa è l'EQUAZIONE FONDAMENTALE DEL MOTO DEI PIANETI (valida anche per orbite ellittiche, ponendo r pari al semiasse maggiore dell'ellisse)

da essa si può ricavare

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{G M_s} r^3} \quad 3^a \text{ LEGGE DI KEPLERO}$$

valida per tutti i pianeti orbitanti attorno a un sole di massa M_s (e anche per i satelliti orbitanti attorno a un pianeta di massa M_s).



||||| e' l'area ~~spazzata~~ spazzata del raggio vettore in un tempo ~~piccolissimo~~ molto piccolo Δt .
Tale area e' circa $\frac{1}{2}(r \omega \Delta t)r$; per $\Delta t \rightarrow 0$, questa espressione e' esatta.

la velocita' istantanea con la quale questa area viene spazzata e' quindi $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(r \omega \Delta t)r}{\Delta t} = \frac{1}{2} \omega r^2 = \text{costante}$, per la

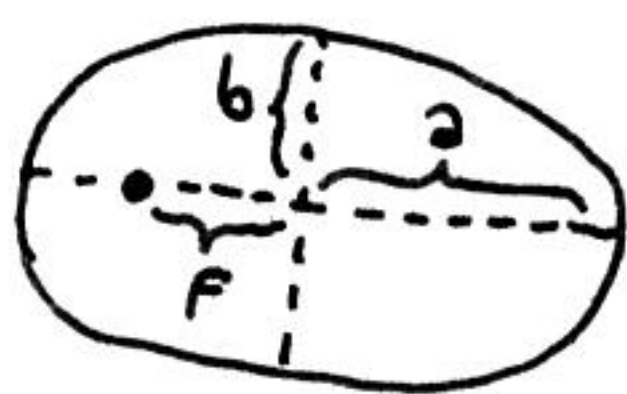
2^a legge di Keplero.

Ma il momento della QT del Pianeta rispetto al Sole e' $r m v = r m \omega r = m \omega r^2$,
e se $\frac{1}{2} \omega r^2 = \text{costante} \rightarrow m \omega r^2 = \text{costante}$.

Perciò la 2^a legge di Keplero afferma che il momento della QT di un pianeta attorno al Sole e' costante nel tempo.

La 1^a legge di Keplero richiede che la forza gravitazionale tra due pianeti sia proporzionale all'inverso del quadrato della loro distanza ($\frac{1}{r^2}$); solo tale forza puo' portare a orbite planetarie ellittiche, col sole in un fuoco.

ellisse:



$$\text{eccentricita' } e = \frac{F}{a} = \frac{\text{dist. foc.}}{\text{asse magg.}}$$

CAMPO GRAVITAZIONALE

Una particella materiale modifica lo spazio circostante, creando attorno a se' un campo gravitazionale.

Un ^{di massa m} corpo portato in prossimità della Terra subisce l'influenza di tale campo, venendo attratto con una forza $F = mg$ diretta radialmente verso il centro della Terra.

L'intensità del campo gravitazionale in quel punto e' quindi:

$$g = \frac{F}{m} \quad ; \text{ questa e' l'accelerazione che subisce il corpo in quel}$$

punto.

Il campo gravitazionale di una massa ^{sferica} M agisce su un corpo posto a distanza R da essa con una intensità $g = G \frac{M}{R^2}$.

Un satellite in orbita attorno alla Terra ha un g efficace nullo, perche' per esso la ^{acceler.} ~~forza~~ centrifuga annulla la ^{acceler.} ~~forza~~ gravitazionale del pianeta: $a_c = G \frac{M}{R^2}$.

Però per quell'orbita g non e' nullo, ma ha un valore ben definito.

Il campo gravitazionale e' un campo vettoriale (perche' per ogni suo punto e' definito un vettore intensità) e stazionario (perche' e' costante col tempo).

ENERGIA POTENZIALE DEL CAMPO GRAVITAZIONALE

Sappiamo che si ha $\Delta U = -L$.

Per un corpo di massa m in prossimità della superficie terrestre, posto ad una altezza h , si ottiene che la sua energia potenziale e'

$$\Delta U = -L = -(-mgh) = mgh$$

Considerando potenziale nullo sulla superficie terrestre.

Per una particella posta ^{a una} ~~alla~~ distanza ~~dal~~ dal centro della Terra per un'aggiore del raggio terrestre, e' piu' comodo considerare come punto a potenziale nullo ~~il~~ il punto a distanza ∞ dalla Terra; in tal modo, a potenziale nullo corrisponde forza nulla (proprio come nel caso della molla).

Dunque, ~~per~~ una particella di massa m posta a distanza r dal centro della Terra (M = massa Terra) avrà un potenziale gravitazionale pari a

$$U(r) = -L_{\text{cor}} = -\int_{\infty}^r F dr = -\int_{\infty}^r -G \frac{Mm}{r^2} dr = -\left[G \frac{Mm}{r} \right]_{\infty}^r = -G \frac{Mm}{r}$$

dove L_{cor} è il lavoro compiuto dalla forza conservativa (gravit.) sulla particella per portarla da distanza ∞ a distanza r dal centro della Terra.

Si vede che l'energia potenziale è negativa, cioè essa è nulla per un punto all'infinito e diminuisce avvicinandoci alla Terra.

Potenziale gravitazionale V = en. potenz. gravit. per unità di massa $V = \frac{U(r)}{m} = -\frac{GM}{r}$ (scalare) associato in ogni punto dello spazio attorno a M

Come si vede, l'energia potenziale dipende da M e m , cioè è una proprietà del sistema di corpi piuttosto che di un singolo corpo. Però si parla spesso dell'energia potenziale di un sasso rispetto alla Terra, perché è il sasso che trasforma maggiormente la sua energia potenziale in energia cinetica, cadendo, mentre l'acquisto di energia cinetica della Terra per reazione alla caduta del sasso è infinitesimale.



VELOCITÀ DI FUGA

M_T = massa Terra
 R_T = raggio Terra

Abbiamo detto che $U(r) = -G \frac{M_T m}{r}$.

Quindi un corpo sulla superficie terrestre ha energia potenziale gravitazionale $U(R_T) = -G \frac{M_T m}{R_T}$ per cui il lavoro necessario per portarlo dalla superficie terrestre all'infinito è $L = G \frac{M_T m}{R_T}$.

Imprimendo a un corpo posto sulla superficie terrestre un'energia cinetica pari a tale valore, il corpo spugnerà l'attrazione terrestre e si fermerà all'infinito. Per un'energia cinetica inferiore, ~~allora~~ la velocità del corpo diventerà nulla prima di raggiungere l'infinito e il corpo ricadrà sulla Terra. Per un'energia cinetica superiore, il corpo oltretutto spugnerà lo stesso l'attrazione terrestre.

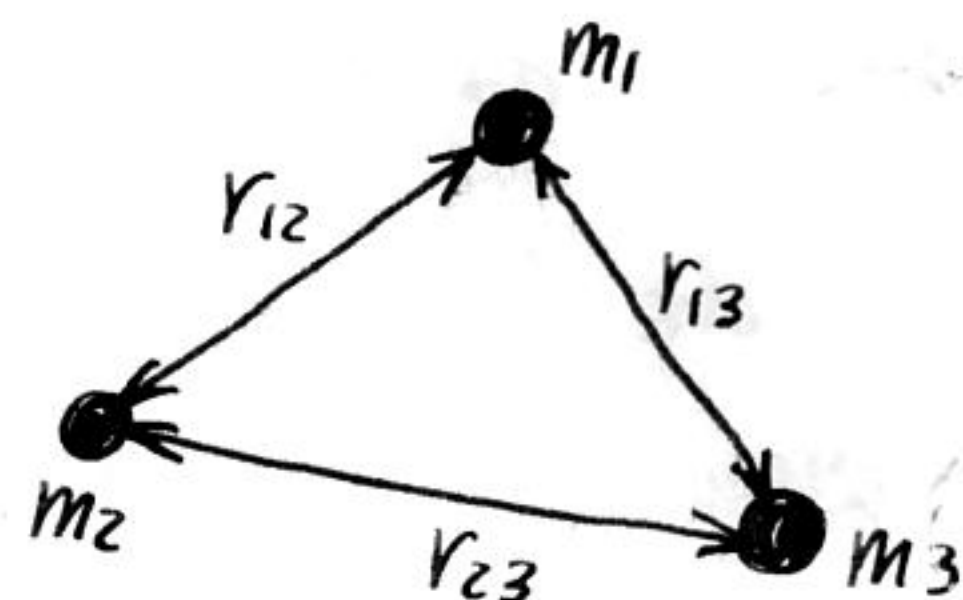
Per cui la minima velocità v_0 necessaria ad un corpo per spuggire all'attrazione terrestre (VELOCITÀ DI FUGA) sarà

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = G \frac{M_T m}{R_T} \quad \text{cioè} \quad v_0 = \sqrt{2 G \frac{M_T}{R_T}} = 40'000 \text{ Km/h, per la Terra.}$$

L'energia potenziale di un sistema di particelle è uguale al lavoro che occorre compiere dall'esterno per raggruppare le particelle del sistema, a partire da una determinata configurazione di riferimento.

Consideriamo tre corpi m_1, m_2 e m_3 posti a distanza ∞ tra loro; vogliamo riunirli nella configurazione mostrata in figura.

Il lavoro necessario per portare m_2 dall'infinito a una distanza r_{12} da m_1 è $-G \frac{m_1 m_2}{r_{12}}$



e il lavoro necessario per portare m_3 dall'infinito a distanza r_{13} da m_1 e r_{23} da m_2 è rispettivamente $-G \frac{m_1 m_3}{r_{13}}$ e $-G \frac{m_2 m_3}{r_{23}}$.

Perciò il lavoro totale per portare le tre masse nella configurazione mostrata è $-G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} \right)$, pari all'energia potenziale del sistema.

Quindi, se volessimo separare di nuovo queste tre masse riportandole all' ∞ , dovremmo fornire un lavoro pari a $G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} \right)$.

Possiamo considerare questa quantità di energia come energia di legame, caratteristica di quella configurazione e immagazzinata nel campo gravitazionale delle tre masse.

ENERGIA DI UN SISTEMA PLANETARIO

Consideriamo un pianeta di massa m orbitante a una distanza r attorno a un sole di massa M .

L'energia potenziale del sistema è $U(r) = -G \frac{Mm}{r}$

e l'energia cinetica è $K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$ (solo del pianeta; il sole è fermo)

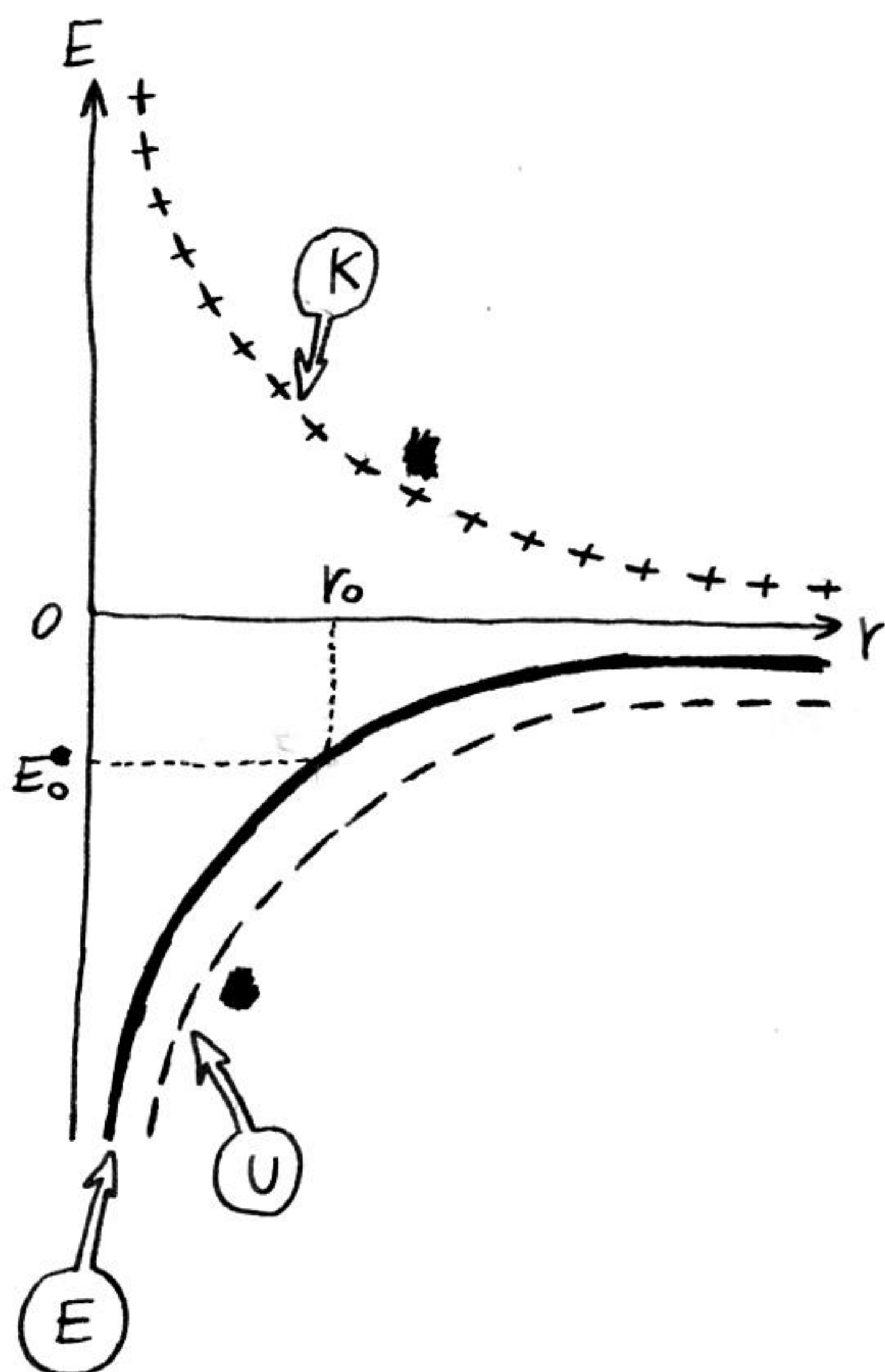
Abbiamo già visto che per un corpo in orbita deve averli:

$$G \frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r \quad \text{ovvero} \quad G \frac{M}{r} = \omega^2 r^2$$

$$\text{quindi} \quad K = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{r}$$

L'energia totale del sistema è dunque

$$E = K + U = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{r} - G \frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r} \quad (\text{costante})$$



Un pianeta con energia totale E_0 rimane in un'orbita di raggio r_0 .
Come si vede, $E < 0$, perciò il sistema è un sistema chiuso e il pianeta è legato al sole altrimenti e non può sfuggire a esso (per farlo avrebbe bisogno di $E > 0$)

		all' ∞
K	sempre > 0	$= 0$ (min)
U	sempre < 0	$= 0$ (max)
E	sempre < 0	$= 0$ (cost)

LA TERRA COME SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE

L'accelerazione ^{centrifuga} della Terra rispetto al Sole è $\omega^2 r = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$.

~~Conseguenza~~

L'accelerazione orbitale della Terra verso il Sole è $-\frac{k}{r^2}$ (abbiamo chiamato $k = GM_s$)
dove r = distanza Terra-Sole

e l'accelerazione di un corpo ^{sulla Terra} posto dalla parte opposta ~~del~~ al Sole, verso il Sole, è $-\frac{k}{(r+r_0)^2}$ dove r_0 = raggio Terra.

~~Conseguenza~~

La differenza tra queste due accelerazioni è 10^{-4} volte l'accelerazione della Terra rispetto al Sole, ed è ~~meno~~ 10^{-7} volte l'accelerazione del corpo rispetto alla Terra.

Perciò praticamente il Sole ha la stessa influenza gravitazionale su un corpo sulla Terra rivolto verso di esso e un altro corpo che giaccia nel punto opposto della Terra. Tali corpi hanno la stessa accelerazione verso il Sole della Terra.

Perciò la Terra può essere considerata un sistema inerziale valido.



PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

(Albert Einstein)

Un sistema S inerziale immerso in un campo gravitazionale di intensità g e un sistema S' uniformemente accelerato con accelerazione g sono equivalenti.

(Cioè, dall'interno di un'astronave, vedendo gli oggetti attratti verso il basso con accelerazione g , non si può sapere se l'astronave è ferma su un pianeta di gravità g o se sta viaggiando nello spazio con accelerazione g).

Da questo deriva l'equivalenza di massa inerziale e massa gravitazionale.

Qual è il massimo periodo che potrebbe avere un pendolo posto in prossimità della superficie terrestre?

Prendiamo il pendolo di lunghezza infinita; esso quindi percorre un arco di raggio ∞ , cioè una retta. Per piccoli spostamenti, il grave del pendolo è sempre alla stessa distanza dalla Terra, cioè a circa R_T dal centro.

La forza con la quale è attratto è quindi

$$F = G \frac{M_T m}{R_T^2}$$

La componente lungo la retta di spostamento del pendolo è

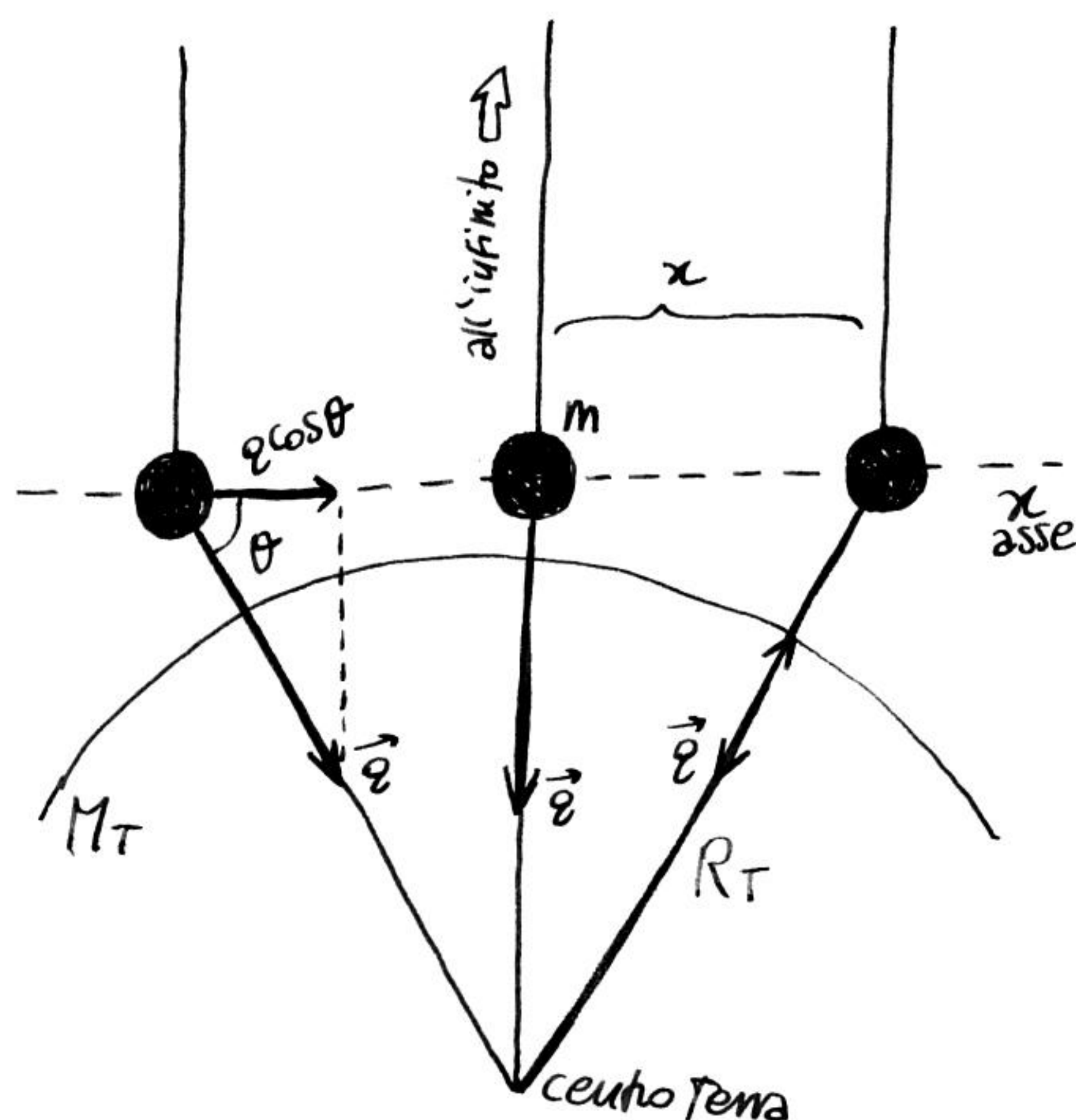
$$F \cos \theta = -G \frac{M_T m}{R_T^2} \cos \theta = -G \frac{M_T m}{R_T^2} \frac{x}{R_T} = -G \frac{M_T m}{R_T^3} x$$

$$F = -kx \quad (\text{cond. per il moto arm. semplice}) \quad \text{purché sia } k = G \frac{M_T m}{R_T^3}$$

Il periodo del pendolo è quindi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{G \frac{M_T m}{R_T^3}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{G \frac{M_T}{R_T^2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}}$$

Con i dati della Terra, otteniamo $T = 84 \text{ min.}$



17 STATICA DEI FLUIDI

Dal punto di vista macroscopico, si classifica la materia in:

* Solidi

* fluidi (sostanze che possono scorrere) $\begin{cases} \text{liquidi} \\ \text{gas} \end{cases}$ (distinzione non netta, perché dipende da temp. e pressione della sostanza)

* plasma (gas altamente ionizzato)

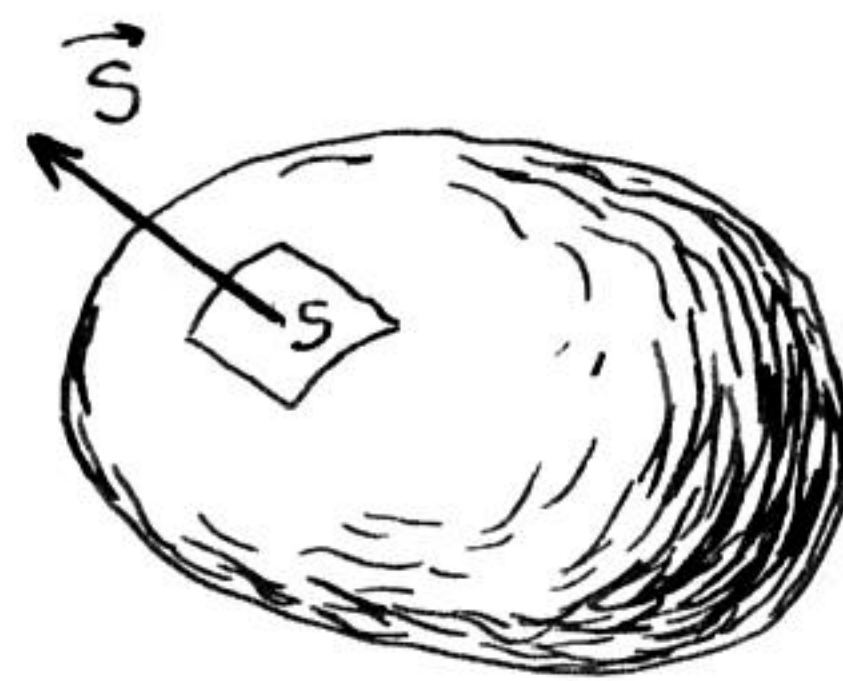
Una forza che agisce su un fluido deve essere perpendicolare alla superficie, perché un fluido in quiete, sottoposto a una forza tangenziale, scorre.

PRESSIONE P = modulo della forza normale per unità di superficie, trasmessa perpendicolarmente alla sezione di fluido considerata. È una grandezza scalare.

$$1 \text{ pascal (Pa)} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (1 \text{ Newton su metro quadro})$$

$$\text{1 bar} \simeq 1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg} = 10^5 \text{ Pa}$$

Consideriamo una superficie chiusa contenente un fluido. Un elemento della superficie può essere rappresentato da un vettore $\vec{S}$ di modulo pari all'area dell'elemento di superficie, perpendicolare a esso, e rivolto verso l'esterno.



La forza $\vec{F}$ esercitata dal fluido su questo elemento di superficie è quindi:

$$\vec{F} = p \vec{S} \quad \text{ovvero} \quad p = \frac{F}{S}$$

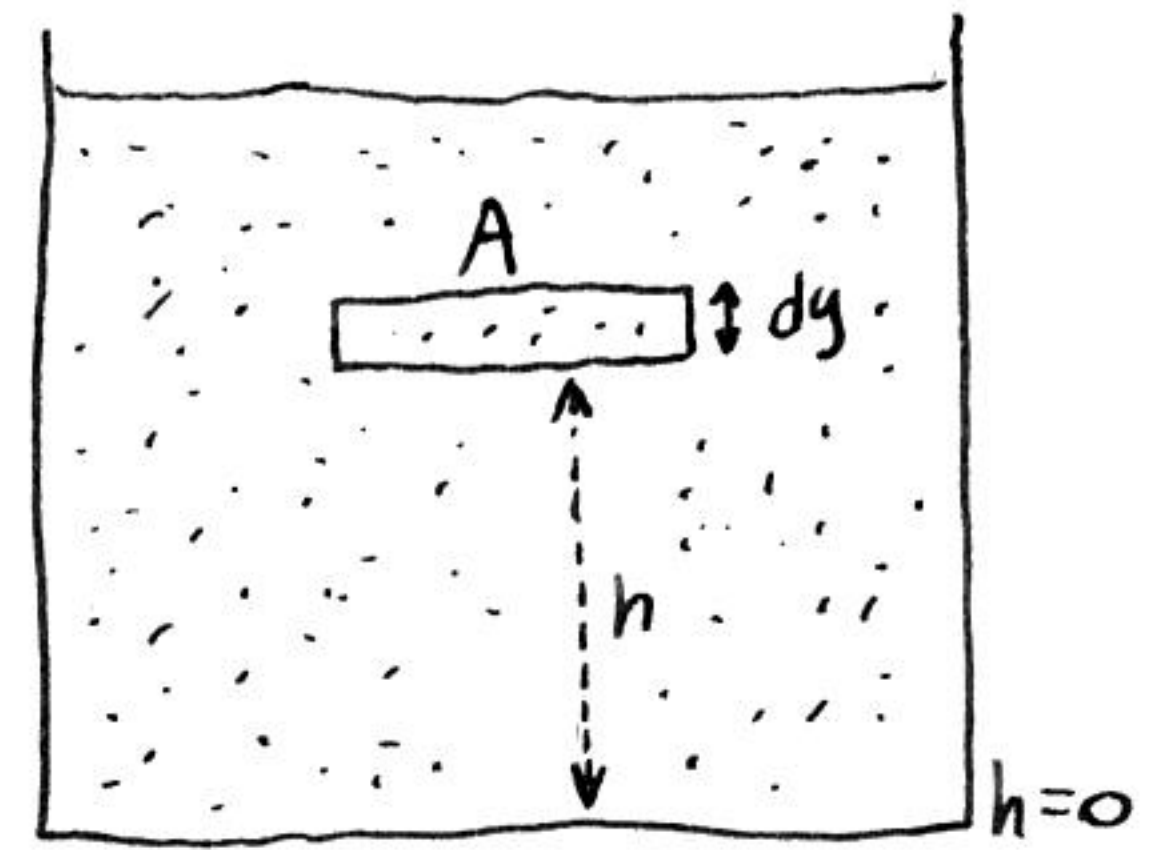
La densità di un liquido varia poco col variare di temperatura e pressione, la densità di un gas varia molto.

Consideriamo un disco di fluido (immerso nel fluido stesso): ha spessore dy , l'area di ciascuna faccia circolare è A e si trova ad altezza h da un determinato livello di riferimento, e ha densità ρ .

È in quiete, per cui le componenti delle forze agenti si devono annullare.

La pressione sulla faccia inferiore sarà p e quella sulla faccia superiore sarà $p + dp$.

Le forze agenti (verticalmente) dunque sono:



$$p A = (p + dp) A + A dy \rho g$$

↑
agente sulla
faccia inferiore
verso l'alto

↑
agente sulla
faccia superiore
verso il basso

↑
forza
peso
del disco

$$\left. \begin{aligned} A dy &= \text{volume} \\ A dy \rho &= \text{massa} \\ A dy \rho g &= \text{peso} \end{aligned} \right\} \text{del disco}$$

cioè: $\frac{dp}{dy} = -\rho g$

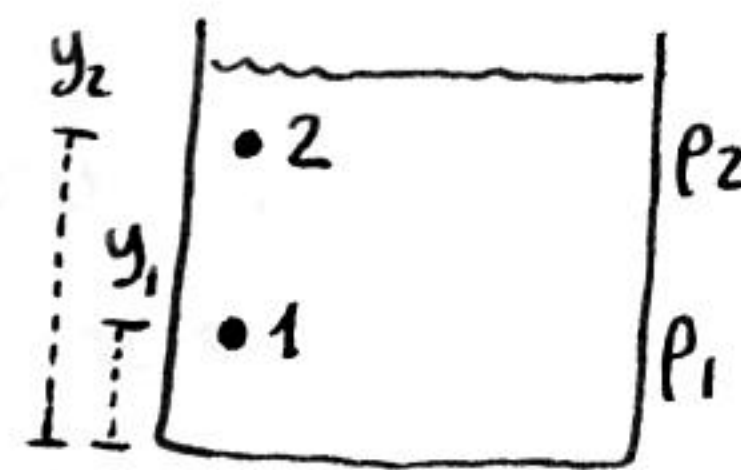
ρg è chiamato PESO SPECIFICO

Possiamo calcolare, integrando, come varia la pressione al variare della quota da 1 a 2:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

... Supponendo ρ e g costanti ...

$$(p_2 - p_1) = -\rho g (y_2 - y_1)$$



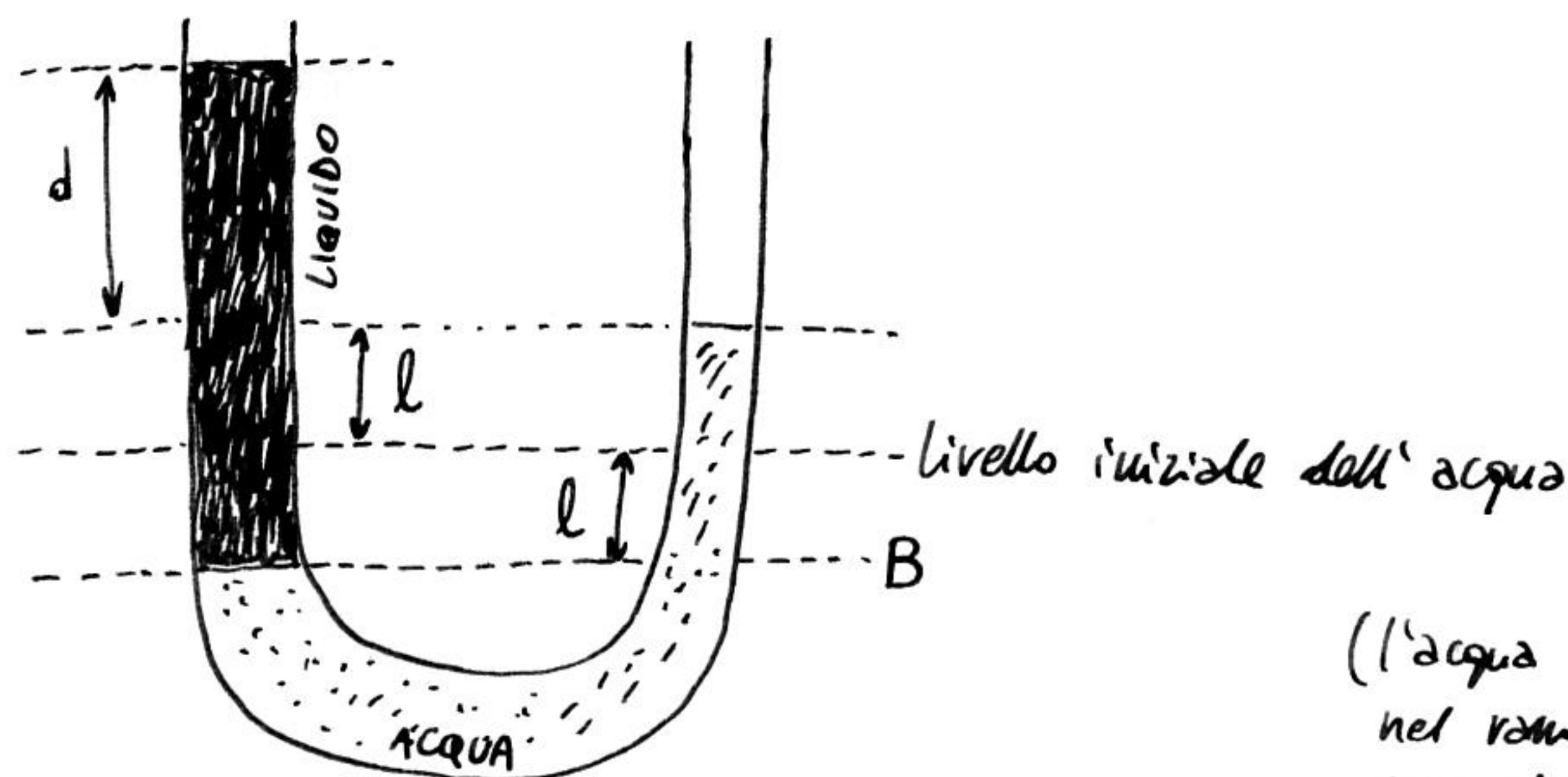
Considerando il punto 2 sulla superficie del fluido, p_2 sarà la pressione atmosferica cioè p_0 , e $(y_2 - y_1)$ sarà la profondità h del punto 1 in questione

$$p_0 - p = -\rho g h \rightarrow p = p_0 + \rho g h$$

Per un gas, se h è grande, ρ varia sensibilmente.

Allo stesso livello,
la pressione è la
stessa, indipendentemente
dalla forma del
recipiente

Un tubo a U viene parzialmente riempito d'acqua. Un altro liquido, non miscelabile, viene versato in un ramo del tubo finché il suo livello superiore non sovrasta di una distanza d il livello dell'acqua nell'altro ramo, che nel frattempo è salito di un tratto l . Trovare la densità relativa all'acqua del liquido.



(l'acqua è salita di un tratto l nel ramo di destra e indiscesa dello stesso tratto l a sinistra)

La pressione al livello B è la stessa nei due rami.

La pressione nel ramo di destra è $p_a \rho_a l$

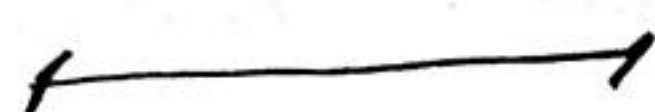
e nel ramo di sinistra è $p_l \rho_l (2l + d)$

p_a = densità ass. acqua

p_l = densità assoluta liquido

Perciò $p_a \rho_a l = p_l \rho_l (2l + d)$

ovvero $\frac{p_l}{p_a} = \frac{2l}{2l + d}$

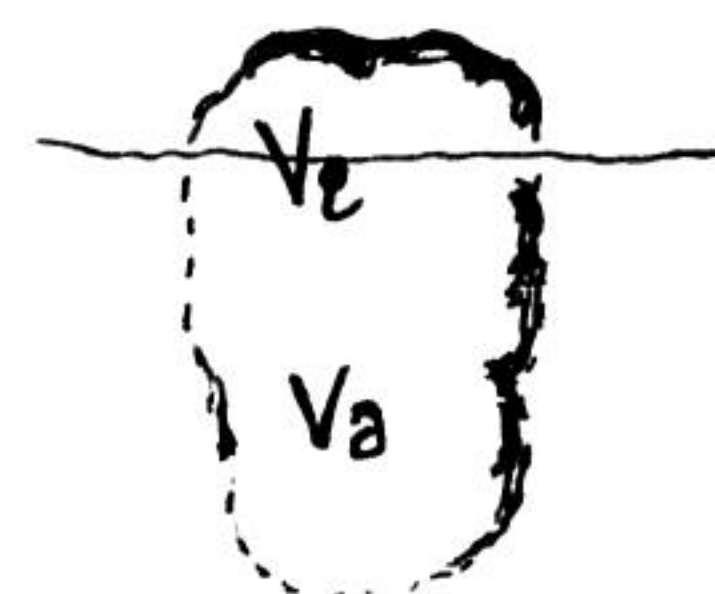


Quale frazione del volume totale di un iceberg emerge dall'acqua?

La densità del ghiaccio è $p_g = 0,92 \text{ kg/dm}^3$ e quella dell'acqua di mare è $p_a = 1,03 \text{ kg/dm}^3$.

Peso iceberg = $p_g V_g \rho$

Peso acqua spostata = $p_a V_a \rho$

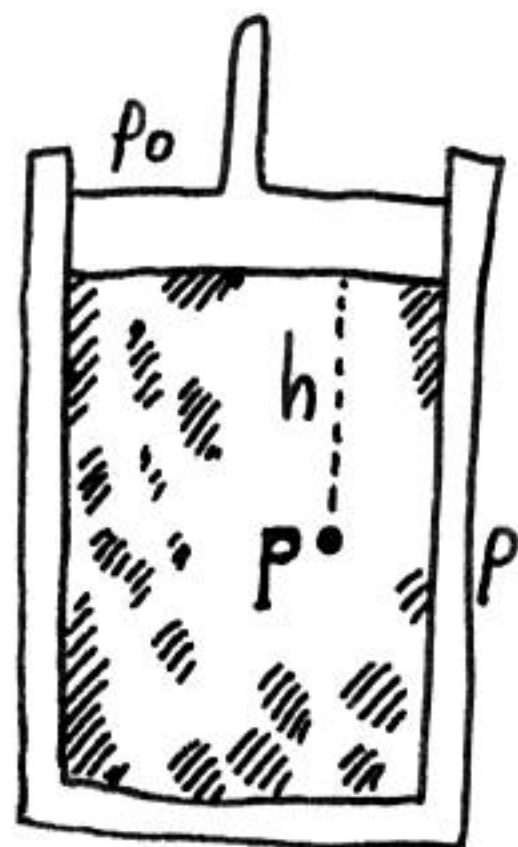


Poiché l'iceberg è in equilibrio, i due pesi sono eguali, cioè:

$$p_g V_g \rho = p_a V_a \rho \rightarrow \frac{V_a}{V_g} = \frac{p_g}{p_a} = \frac{0,92}{1,03} = 0,89 = 89\%$$

$V_a = 89\%$ di V_g

Il volume V_a dell'acqua spostata è il volume immerso dell'iceberg. Quindi l'11% dell'iceberg emerge dall'acqua.

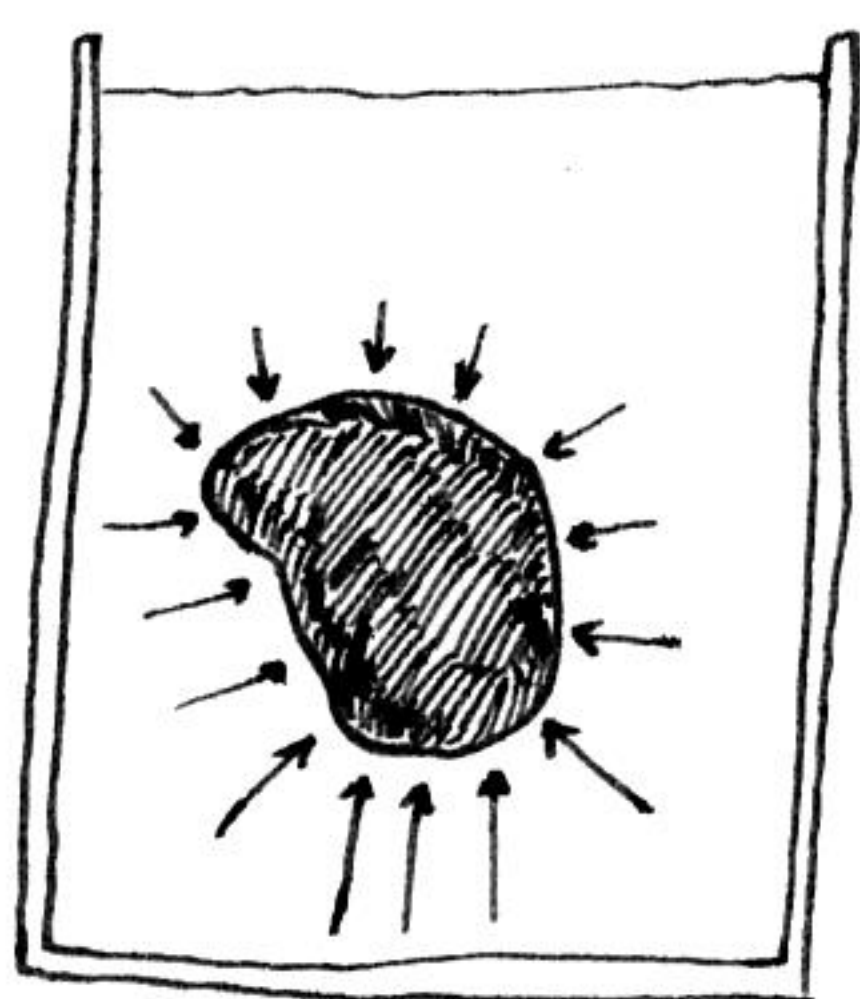


La pressione p nel punto P a profondità h sotto la superficie libera del liquido è data da $p = p_0 + \rho g h$.

Applicando ora col pistone una pressione aggiuntiva Δp_0 , questa sarà la variazione di pressione in un qualsiasi punto P del fluido, essendo i liquidi incompressibili e quindi la loro ρ costante.

PRINCIPIO DI PASCAL:

"La pressione esercitata su un fluido si trasmette senza diminuzioni a ogni porzione del fluido e delle pareti del contenitore"

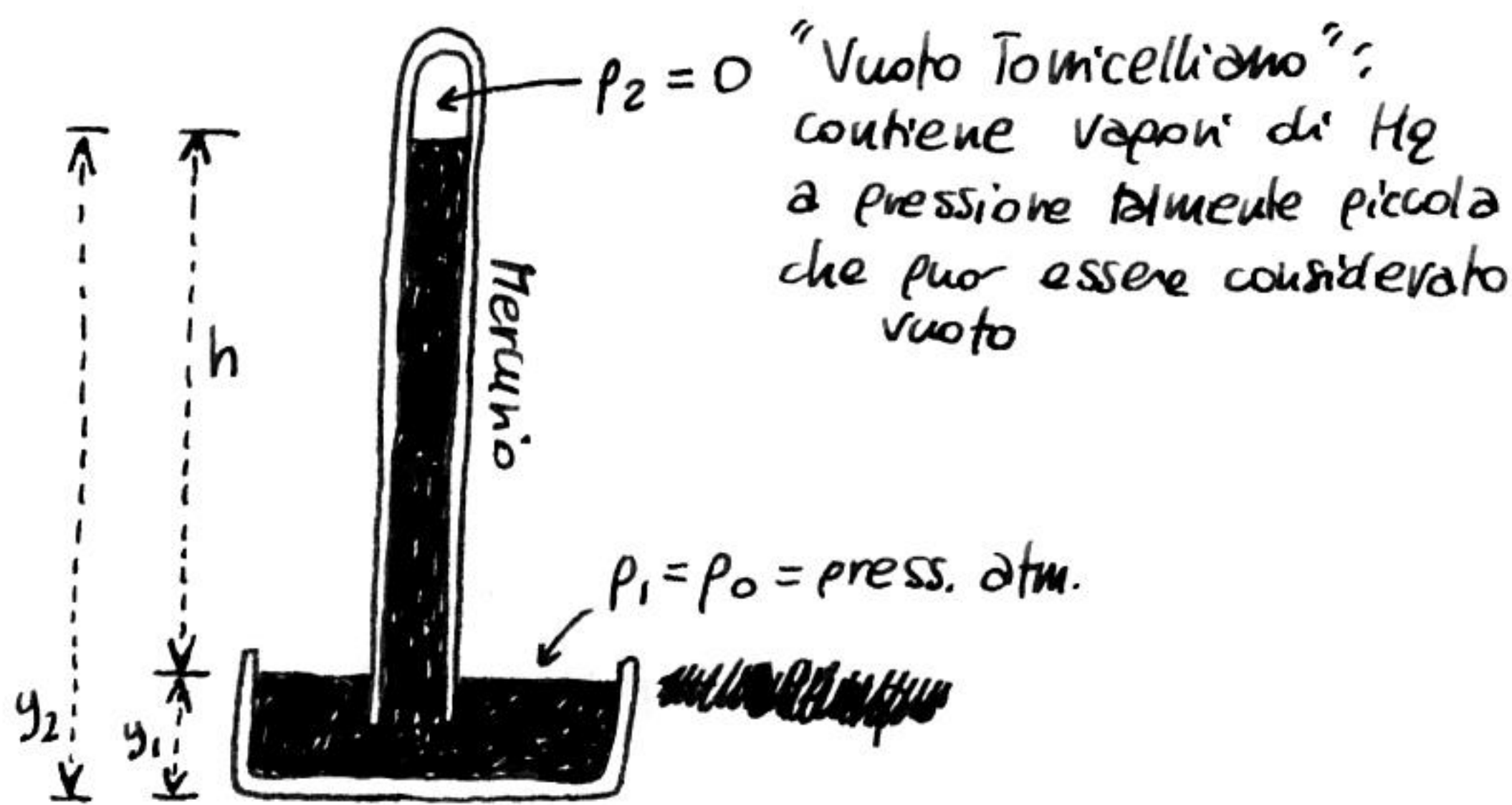


~~Quando un corpo è immerso in un fluido, quest'ultimo esercita sul corpo delle spinte (pressioni), maggiori sulle parti immerse più profondamente.~~
Quando un corpo è immerso in un fluido, quest'ultimo esercita sul corpo delle spinte (pressioni), maggiori sulle parti immerse più profondamente.
Poiché queste non dipendono dal materiale del corpo, sostituiamo ad esso una porzione dello stesso fluido di uguale volume e forma; questo subirà le stesse pressioni del corpo e sarà anche in equilibrio. Quindi la forza agente su esso sarà pari al suo peso, diretta verso l'alto e applicata nel suo centro di gravità; quest'ultimo punto corrisponderà al centro di spinta del corpo, punto nel quale agisce la spinta risultante.

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE:

"Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del fluido spostato"

BAROMETRO A MERCURIO di Torricelli (1608)



$$p_2 - p_1 = -\rho g (y_2 - y_1)$$

ovvero

$$p_0 = \rho_{Hg} g h$$

al livello del mare, $h \approx 76 \text{ cm}$

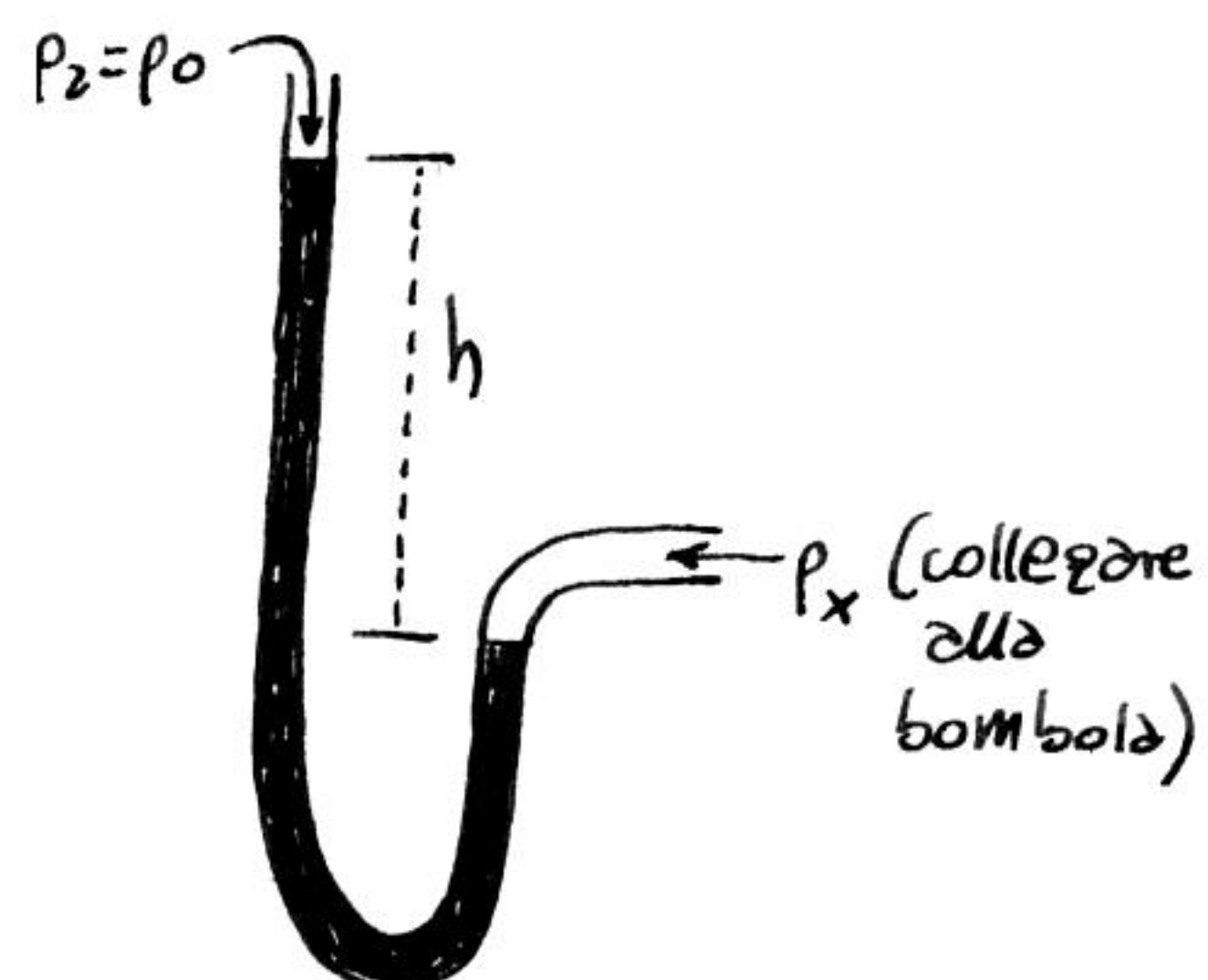
Una pressione equivalente a quella esercitata da una colonna di mercurio alta 76 cm a 0°C dove $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, si chiama 1 Atmosfera (1 atm).

Perciò $1 \text{ atm} = \rho_{Hg} g h = 13 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 0,76 \approx 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mm Hg}$

La pressione atmosferica in un punto è numericamente uguale al peso di una colonna d'aria di sezione unitaria alta dal punto in questione fino all'esterno dell'atmosfera.

PRESSIONE DIFFERENZIALE $p - p_0$: è la differenza tra la pressione esistente nel fluido (**PRESSIONE ASSOLUTA**) e la pressione atmosferica

MANOMETRO (misura pressioni differenziali) A TUBO APERTO



$$p_x - p_0 = \rho g h$$

per misurare la pressione p_x del gas in una bombola

Un manometro a tubo aperto pieno di mercurio e' connesso al vano di sinistra a una bombola; nel vano di destra il mercurio e' piu' alto di 39 cm rispetto al vano di sinistra. Su un barometro si legge che la pressione atmosferica e' 75 cm Hg.

Trovare pressione differenziale e assoluta del gas nella bombola.

La pressione del gas nella bombola nel vano di sinistra e' pari alla pressione esercitata nel vano di destra allo stesso livello dalla ~~colonna~~ colonna di mercurio alta 39 cm, piu' quella atmosferica di 75 cm Hg.

Perciò la pressione assoluta del gas e' $(39 + 75) \text{ cm Hg} = 114 \text{ cm Hg}$ e quella differenziale e' 39 cm Hg.

Pressione assoluta:

$$114 \text{ cm Hg} = \frac{114}{76} \text{ atm} = 1,5 \text{ atm} = 1,52 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Pressione differenziale:

$$39 \text{ cm Hg} = 0,51 \text{ atm} = 0,52 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\frac{114}{39} \text{ atm} =$$

$$x \text{ cm Hg} = \frac{x}{76} \text{ atm} \quad \text{~~atmosferica~~}$$

18 DINAMICA DEI FLUIDI

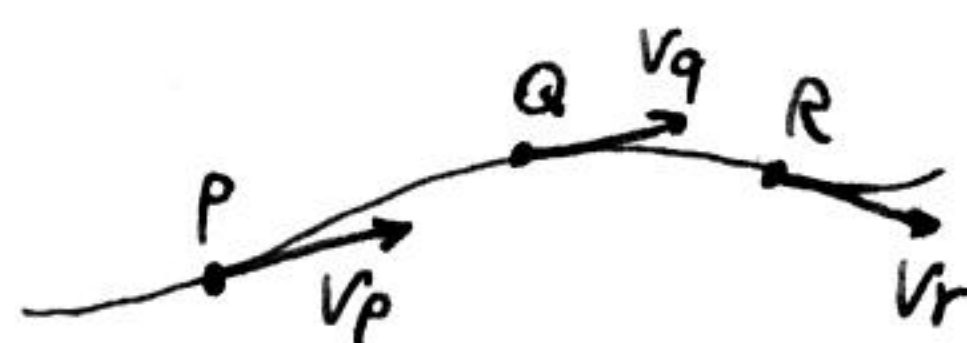
Per descrivere il moto di un fluido, è conveniente seguire il procedimento di Euler (1707), che mira a descrivere i valori di velocità, densità ecc. istante per istante, per ogni dato punto anziché considerare le particelle singole del fluido e i loro valori come queste scorrono.

Il moto di un fluido può essere:

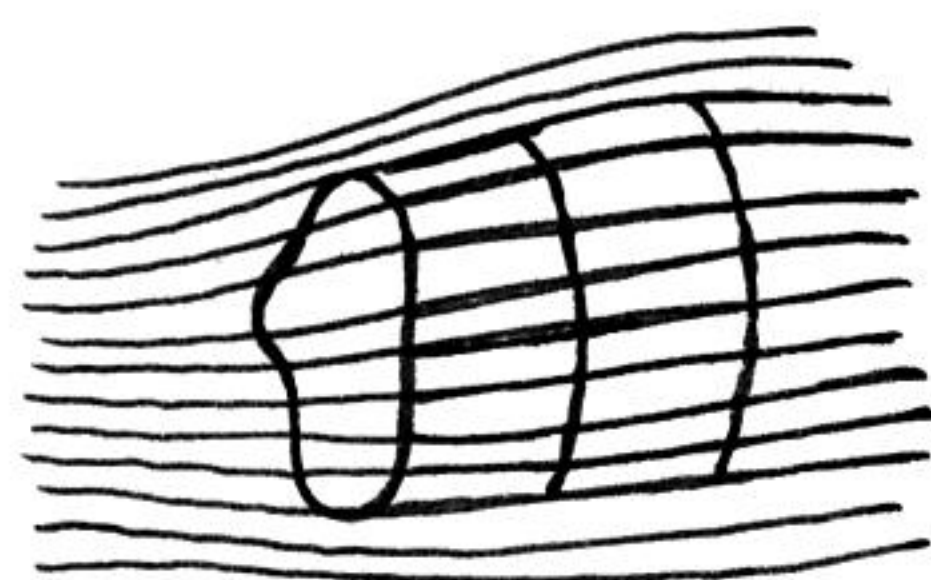
- 1) STAZIONARIO o NO $\rightarrow$ se la velocità delle particelle in un dato punto è costante nel tempo. La velocità può variare però da punto a punto.
- 2) ROTAZIONALE o IROTAZIONALE $\rightarrow$ se in ogni punto le particelle di fluido hanno velocità angolare non nulla rispetto a quel punto (in pratica, se una ruota immersa nel fluido si mette a ruotare).
- 3) COMPRESSIBILE o INCOMPRESSIBILE $\rightarrow$ se la densità ρ varia nel tempo.
- 4) VISCOSO o NO $\rightarrow$ la viscosità di un fluido corrisponde all'attrito dei solidi.

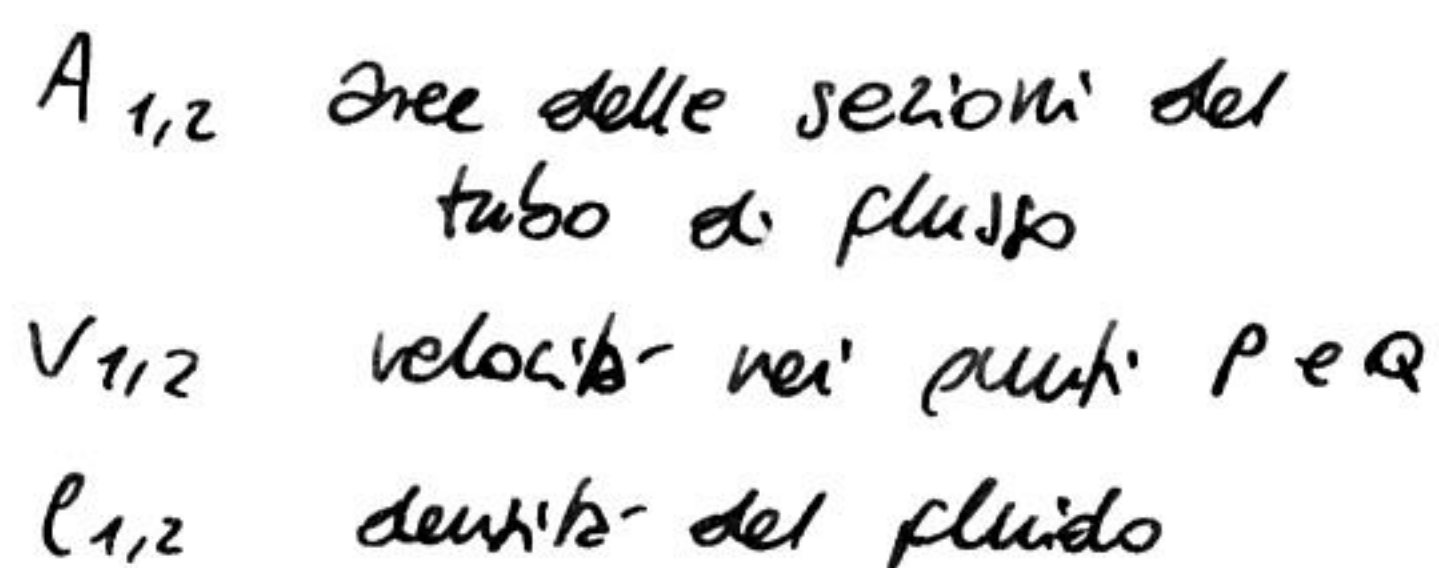
(Noi tratteremo moti STAZIONARI IROTAZIONALI di fluidi INCOMPRESSIBILI e NON VISCOSI)

Tracciando il percorso di una particella, si individua una LINEA DI FLUSSO che viene seguita da ogni particella che passa per il punto iniziale della linea. Si può tracciare una linea di flusso per ogni punto; le linee di flusso non si possono mai intersecare.



Tracciando tutte le linee di flusso passanti per una linea chiusa immersa nel fluido, si individua un TUBO DI FLUSSO che si comporta come un condotto, proprio perché le linee di flusso non possono mai incrociarsi.




$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 V_1 \Delta t$$
$$e \text{ in } Q e^- \quad l_z A_z V_z -$$

ovvero $\rho A V = \text{costante}$ (PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA)

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Considerando un
elemento di Volume;

velocità di
accumulazione di
massa
in tale elemento
di volume...

velocità con la quale
la massa entra (~~esce~~)
~~esce~~ (~~esce~~)
~~velocità con la quale~~
provenendo da una sorgente
(se $S > 0$) o esce per
finire in un pozzo
(se $S < 0$), dall'ele-
mento di volume ...

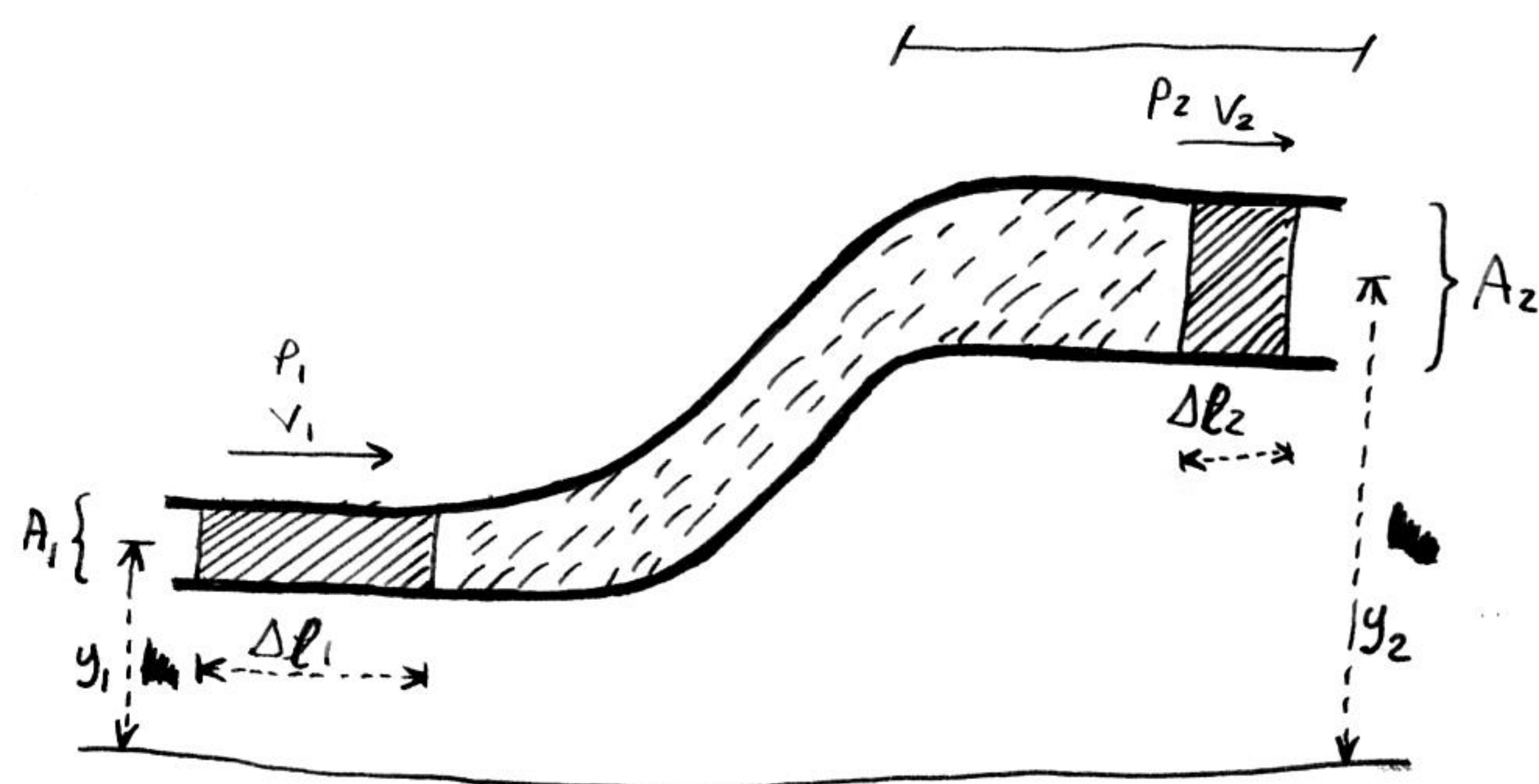
Se il fluido è incomprimibile, $\rho_1 = \rho_2$ e quindi

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

ovvero $AV = \text{costante}$

$AV = \text{PORTATA VOLUMETRICA}$ misurata in m^3/s

Nota che ~~la velocità~~ $A \propto \frac{1}{v}$, cioè la velocità è maggiore dove la sezione del tubo è minore, cioè dove le linee di flusso sono più vicine, e dove la pressione è minore (poiché sono le pressioni a creare l'accelerazione necessaria per cambiare la velocità da v_1 a v_2)



Fluido incomprimibile e non viscoso, in moto stazionario

$\rho = \text{costante}$

Il volume di fluido /// scorre dal punto 1 al punto 2.

In 1 agisce la forza $p_1 A_1$ (agente verso destra) e in 2 la forza $-p_2 A_2$ (agente verso sinistra).

Applichiamo il teorema dell'energia cinetica: "il lavoro compiuto dalla forza risultante agente sul sistema è pari alla variazione di energia cinetica del sistema" ($L = \Delta K$).

Quindi si ha:

$$L = p_1 A_1 \Delta l_1 - p_2 A_2 \Delta l_2 - mg (y_2 - y_1)$$

lavoro compiuto dalla
forza di pressione $p_1 A_1$
agente verso destra

lavoro compiuto dalla
forza di pressione $p_2 A_2$
agente verso sinistra

lavoro compiuto dal
campo gravitazionale
nello spostare il volume
di fluido

$$\Delta K = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2$$

Applicando il teorema $L = \Delta K$, avremo:

$$p_1 A_1 \Delta l_1 - p_2 A_2 \Delta l_2 - mg (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2$$

Notare che e- $A_1 \Delta l_1 = V_1$ $\rho = \frac{m}{V} \rightarrow A_1 \Delta l_1 = V = \frac{m}{\rho}$

$$p_1 \frac{m}{\rho} - p_2 \frac{m}{\rho} - mg (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2$$

$$p_1 - p_2 - \rho g (y_2 - y_1) = \rho \frac{1}{2} V_2^2 - \rho \frac{1}{2} V_1^2$$

$$p_1 - p_2 - \rho g y_2 + \rho g y_1 = \rho \frac{1}{2} V_2^2 - \rho \frac{1}{2} V_1^2$$

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

ovvero

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{cost}$$

PRESSIONE
STATICA

PRESSIONE
DINAMICA

EQUAZIONE DI BERNOULLI

(essa rappresenta il teorema della
conservazione dell'energia
nel caso di un fluido)

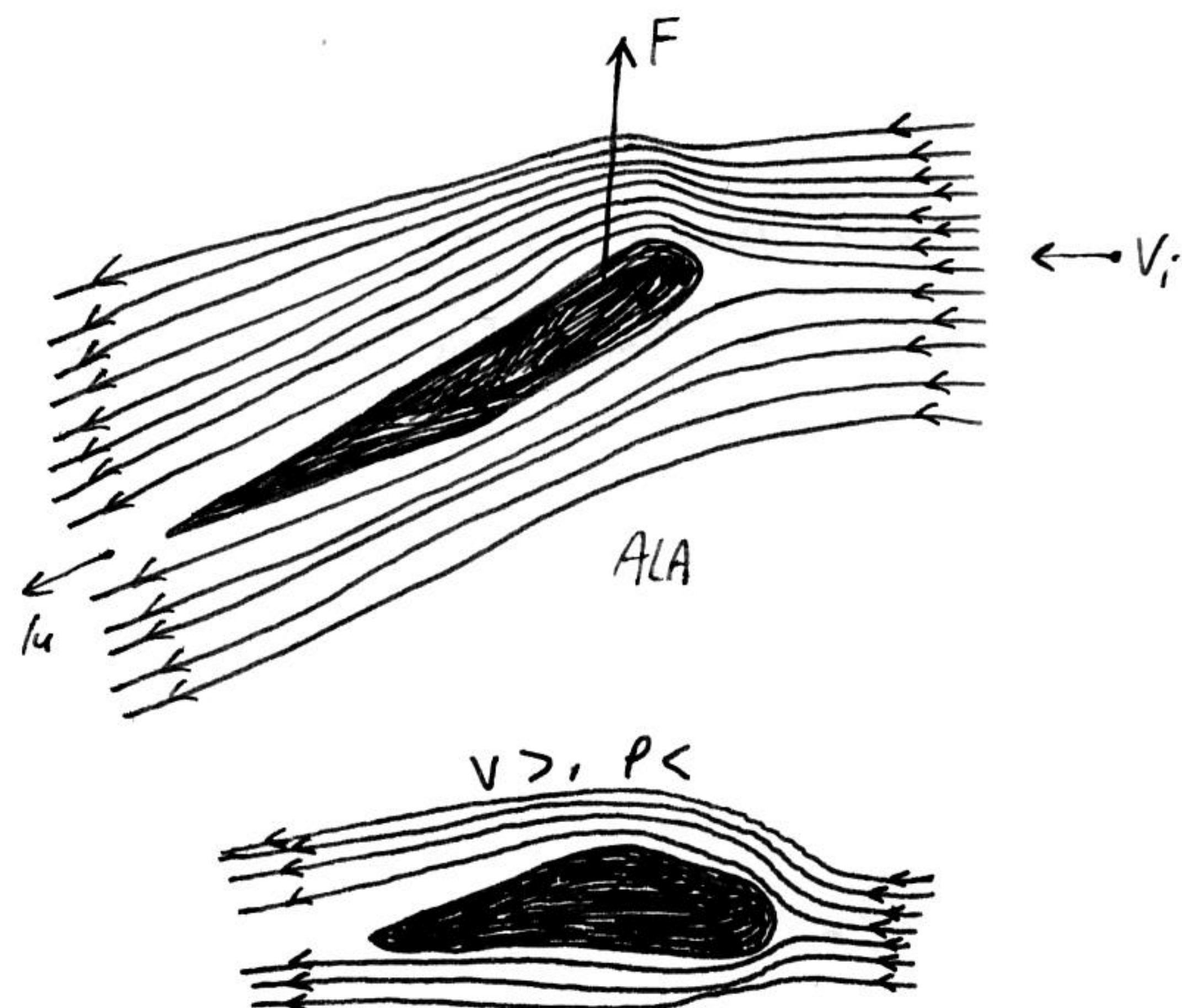
La costante individuata dall'equazione di Bernoulli varia considerando
diverse linee di flusso (in questa trattazione noi abbiamo considerato la
linea di flusso coincidente con l'asse del condotto); e' per la stessa
nel caso che il moto del fluido sia irrotazionale.

Notare che se il fluido e' a riposo, $V_1 = V_2 = 0$ e l'eq. di Bernoulli diventa
 $p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2 \rightarrow p_1 - p_2 = \rho g h$ che e' l'eq. gia' vista precedentemente
e contenuta quindi come caso particolare nell'eq. di Bernoulli.

~ Applicazioni dell'equazione di Bernoulli. ~

SPINTA DINAMICA: Spinta (verso l'alto) che agisce su un corpo, in virtù del suo movimento dentro il fluido (ala di un aereo...)

SPINTA STATICA: Spinta di Archimede (verso l'alto) di un corpo immerso in un fluido, esercitata dal fluido (pallone in acqua...)



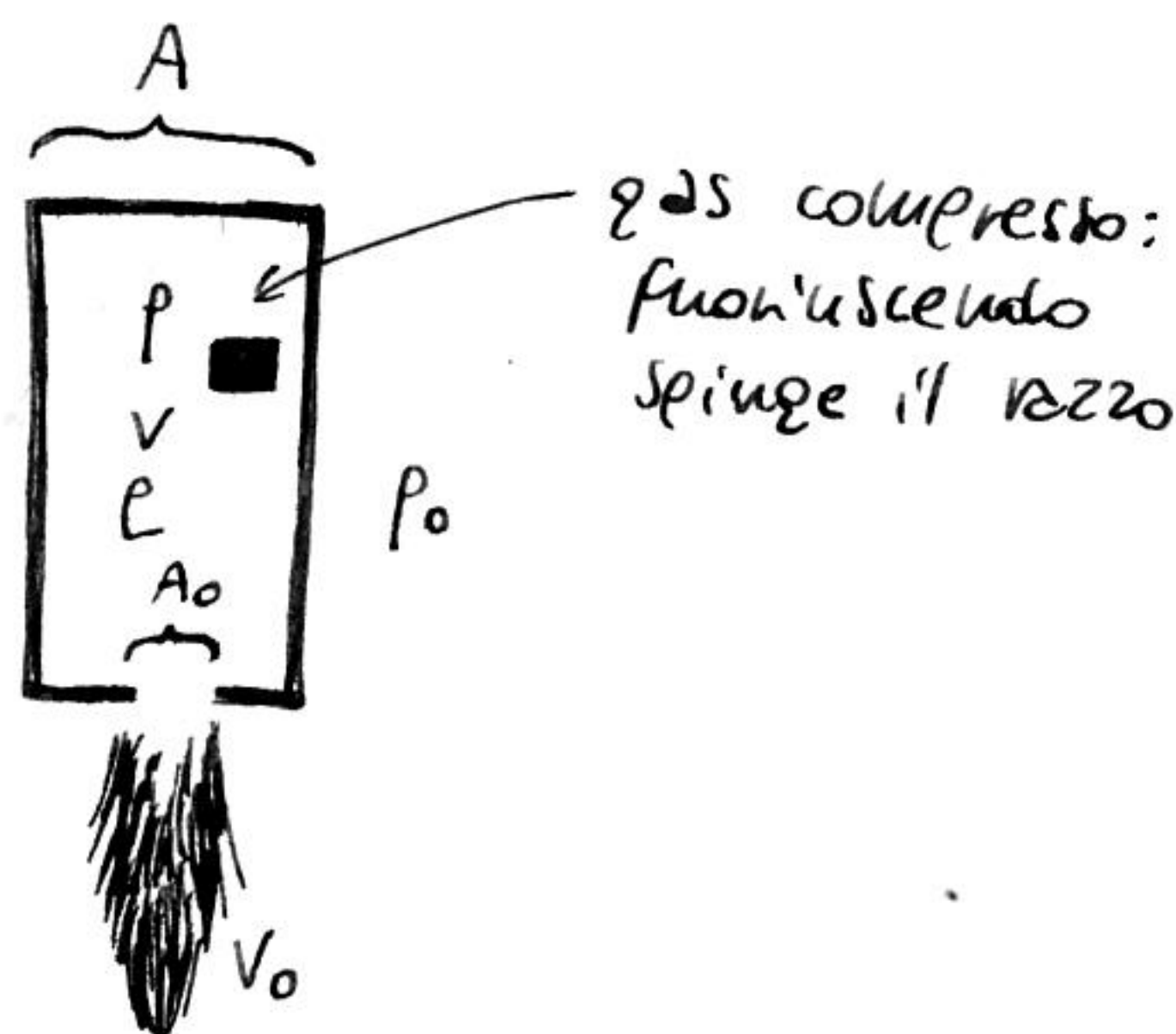
Sopra l'ala, l'aria deve percorrere una distanza maggiore che sotto l'ala, e per un'unità d'età alla stessa velocità; perciò sopra l'ala la velocità dell'aria è maggiore, la pressione è minore e c'è una spinta verso l'alto.

Spinta su un razzo

A = sezione del razzo

A_0 = sezione del foro di espulsione

Linee di flusso dell'aria su un'ala di aereo in movimento.
L'aria, prima di colpire l'ala, ha velocità orizzontale V_i ; dopo, la sua velocità in uscita V_o ha una componente verticale. Ciò vuol dire che l'ala ha spinto l'aria verso il basso, e, per reazione, l'aria solleva l'ala con una forza F .
Sopra l'ala, le linee di flusso sono più fitte $\rightarrow$ la velocità è maggiore $\rightarrow$ la pressione è minore.



Dall'eq. di Bernoulli abbiamo:

$$P_1 - P_2 = \rho g (y_2 - y_1) + \frac{1}{2} \rho (V_2^2 - V_1^2)$$

Possiamo considerare trascurabile la variazione di altezza, e trascurare perciò $\rho g (y_2 - y_1)$.

Unidimensionale $p_1 = p$ pressione del gas all'interno del vello
 $p_2 = p_0$ pressione atmosferica all'esterno
 $v_1 = v$ velocità del gas all'interno del vello
 $v_2 = v_0$ velocità di espulsione del getto

Abbiamo così

$$p - p_0 = \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - v^2) \quad \text{cioè} \quad v_0 = \sqrt{2 \frac{p - p_0}{\rho} + v^2}$$

velocità di ~~espulsione~~
espulsione del gas
dal foro

Per un gas a pressione e velocità non troppo alte, possiamo considerarlo incompressibile e in moto stazionario.

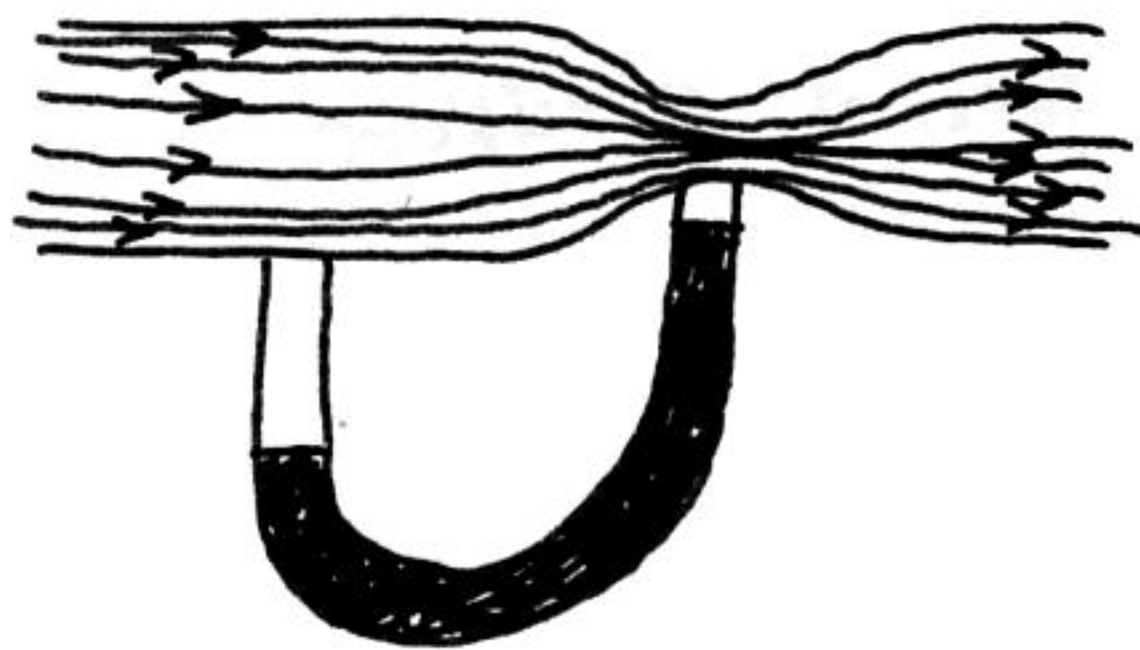
Abbiamo anche $A v = A_0 v_0$; per $A \gg A_0$, cioè se il foro di espulsione è piccolo in rapporto alla sezione del vello, si ha $v \ll v_0$, cioè v è trascurabile rispetto a v_0 ; si ha perciò $v_0 = \sqrt{2 \frac{p - p_0}{\rho}}$.

La spinta sul vello è data da $v_0 \frac{dM}{dt}$, dove $\frac{dM}{dt}$ = massa espulsa nell'unità di tempo = $A_0 \rho v_0$; la spinta sarà quindi

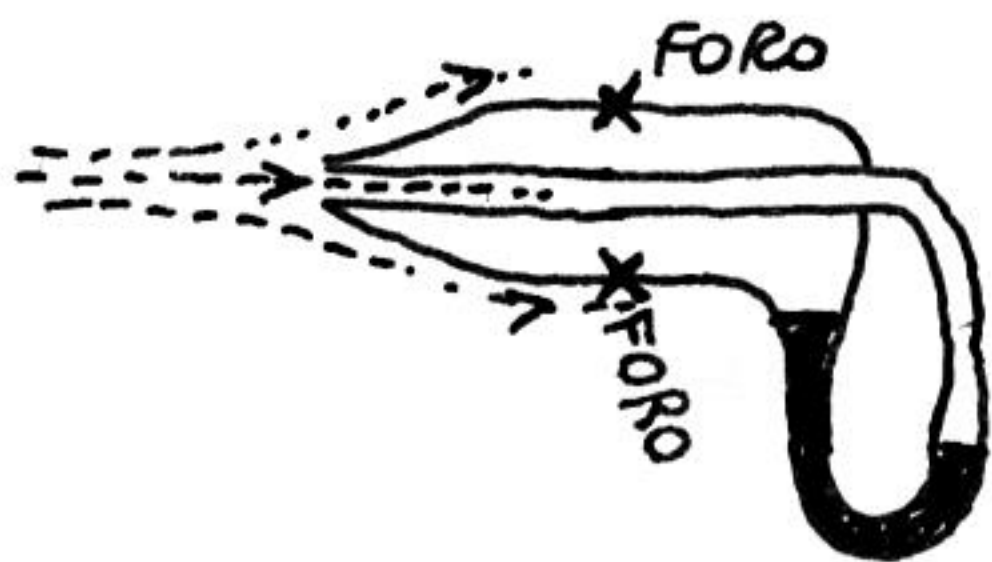
$$v_0 \frac{dM}{dt} = A_0 \rho v_0^2 = A_0 \rho \left(2 \frac{p - p_0}{\rho} \right) = 2 A_0 (p - p_0).$$

Altre applicazioni sono il venturimetro e il tubo di Pitot.

Venturimetro = è un manometro differenziale che viene immerso in un liquido per misurare la velocità di flusso



Tubo di Pitot = dispositivo che misura la velocità di flusso di un gas



CAMPI DI FLUSSO

Costruiamo il campo di flusso del fluido associando a ogni punto il vettore velocità del fluido in quel punto.

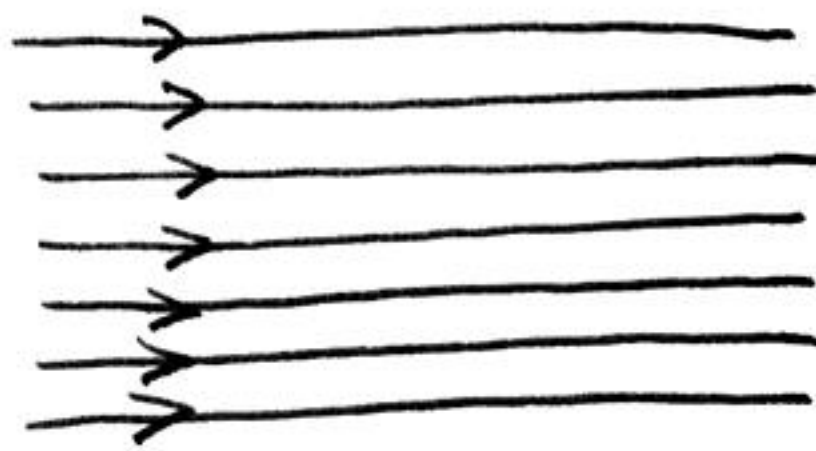
Per un flusso costante nel tempo, il campo è stazionario.

Se il flusso è irrotazionale e stazionario, è definita per esso una funzione ψ detta potenziale di velocità, da cui si può derivare la velocità $\vec{v}$, proprio come dal potenziale gravitazionale V si poteva derivare l'intensità $\vec{g}$ del campo gravitazionale.

Perciò c'è analogia fra tale campo di flusso e un campo di una forza conservativa.

TIPI DI CAMPI DI FLUSSO

OMogeneo

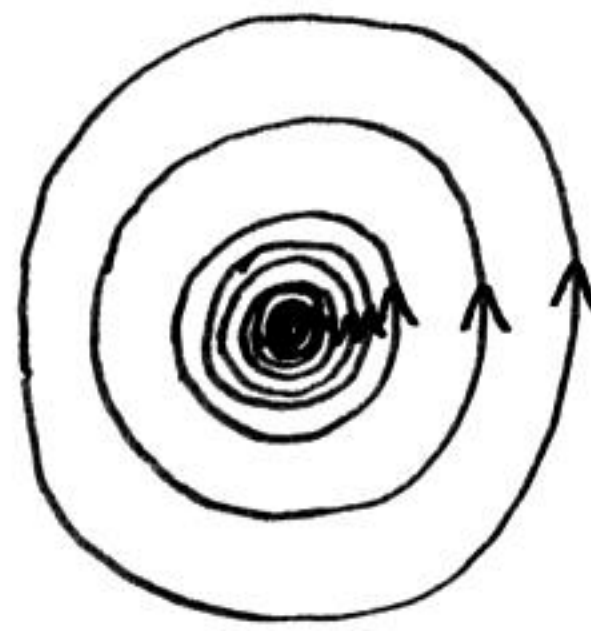


ROTazionale
UNIFORME



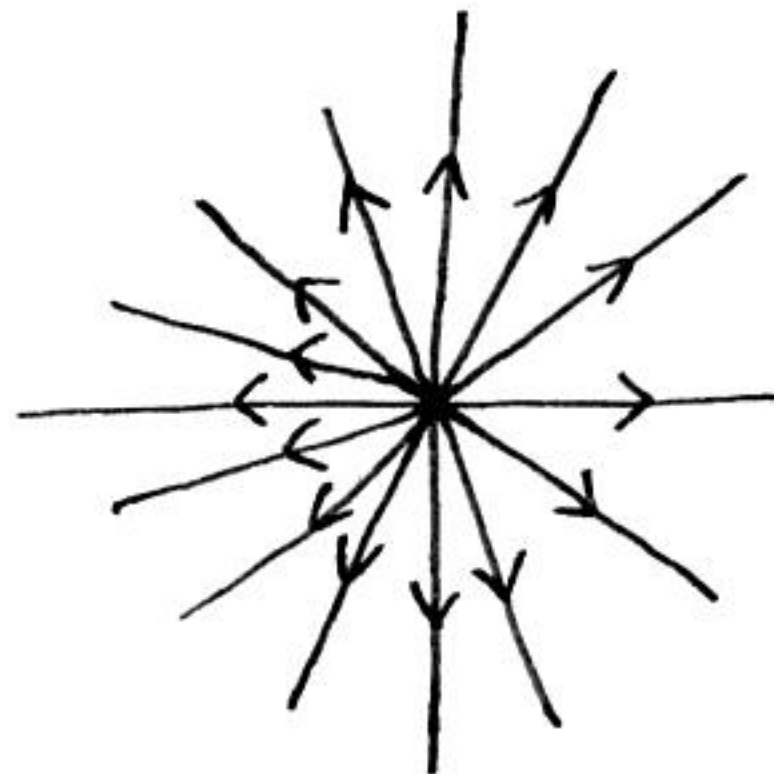
$\left\{ \begin{array}{l} v \text{ è proporzionale a } r \end{array} \right.$

VORTICOSO
(IRROTazionale)

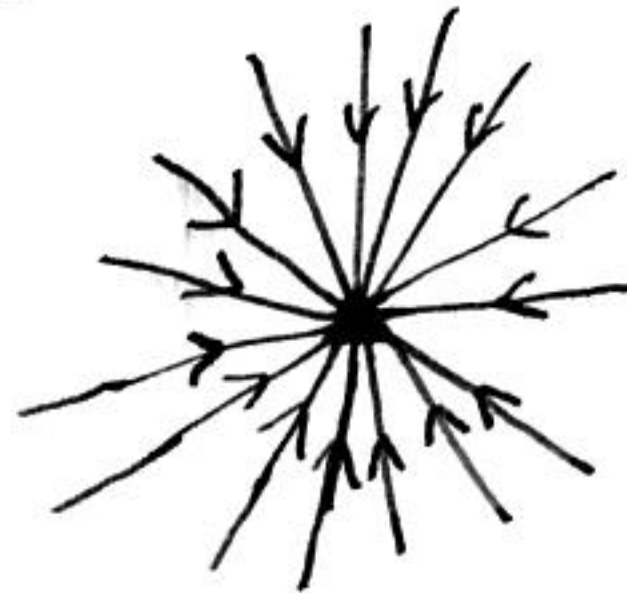


$\left\{ \begin{array}{l} v \text{ è proporzionale a } \frac{1}{r} \\ \text{irrotazionale ovunque,} \\ \text{tranne che nel centro} \end{array} \right.$

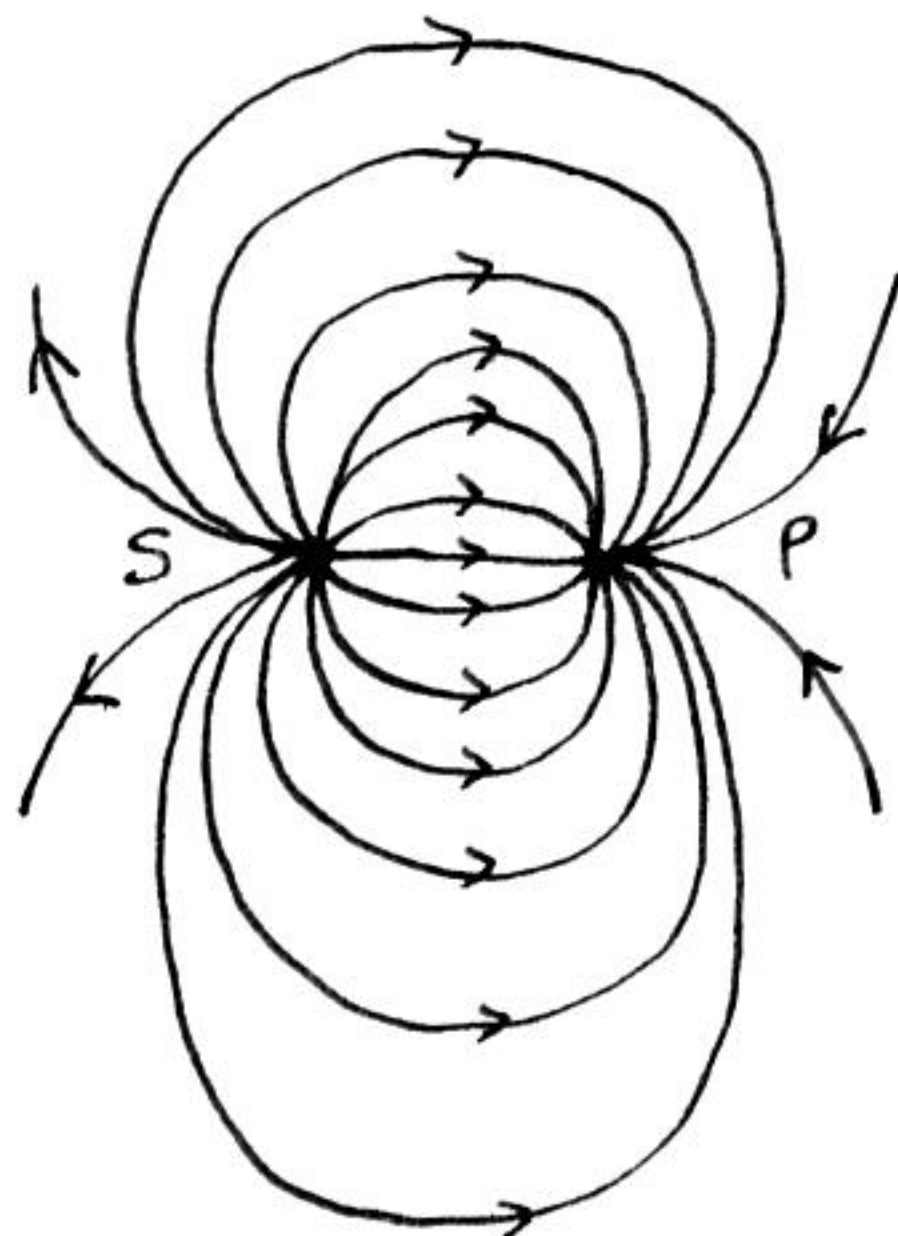
SORGENTE



POZZO

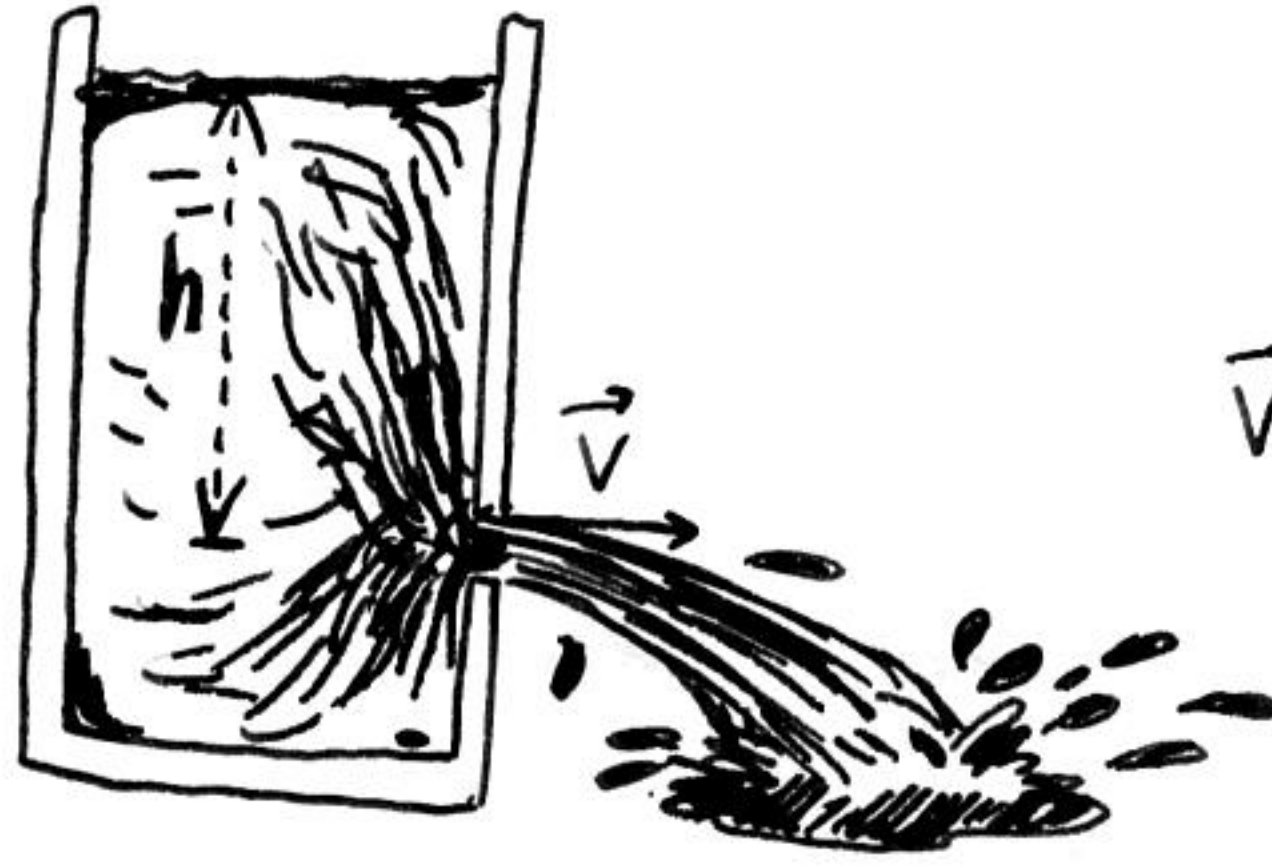


FLUSSO DI
DIPOLo LINEARE



$\left\{ \begin{array}{l} \text{formato da sorgente } S \\ \text{e pozzo } P \end{array} \right.$

legge di Torricelli



$$\vec{V} = \sqrt{2gh}$$

$\vec{V}$ = velocità effluente

Se il foro fosse diretto verso l'alto, il getto uscirebbe ad altezza h

19 ONDE NEI MEZZI ELASTICI

• ONDE MECCANICHE •

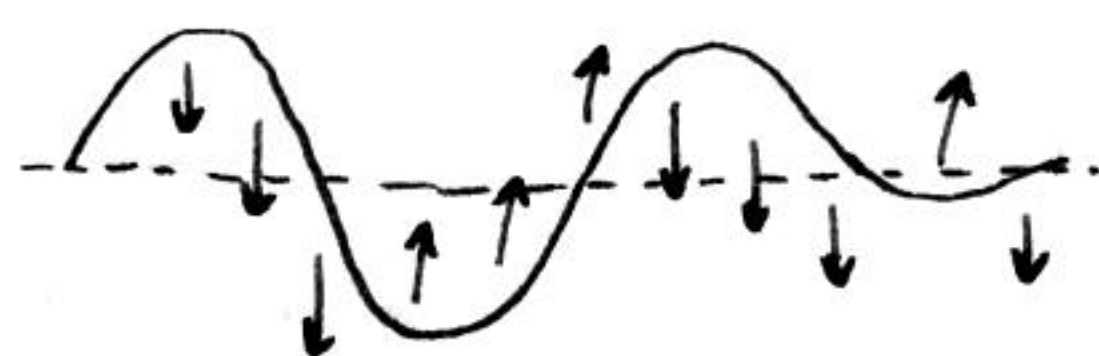
Le ONDE MECCANICHE sono le onde che si propagano nei mezzi elastici.

Esse hanno origine dallo spostamento, e dalla sua successiva oscillazione, di una porzione di un mezzo elastico dalla sua posizione di equilibrio.

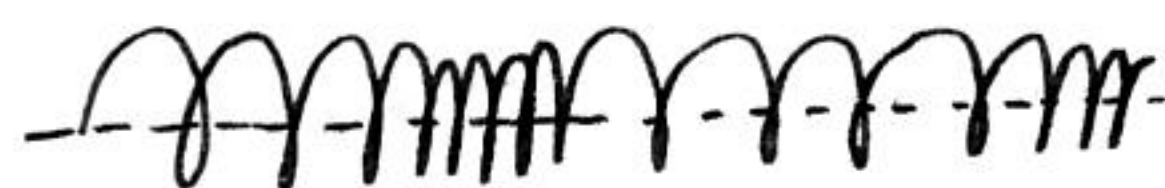
Tale perturbazione può arrivare a lunghe distanze nel mezzo elastico; ~~ma~~ non deriva da dupli spostamenti del mezzo elastico, ma si propaga in continuo della perturbazione da una porzione del mezzo elastico alla successiva; il mezzo elastico non si muove. Perché tali onde possano trasmettersi deve esserci materia; ciò non è necessario per le ONDE ELETTROMAGNETICHE (es. luce).

Le proprietà del mezzo elastico che ci informano sulla velocità dell'onda che lo attraversa sono la sua ELASTICITÀ (che ~~condiziona~~ genera le forze di richiamo derivanti dallo spostamento di una porzione del mezzo dalla sua posizione di equilibrio) e la sua INERZIA (che ci dice come le porzioni del mezzo reagiscono a tali forze di richiamo).

ONDE TRASVERSALI: quando lo spostamento delle particelle materiali è perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda
(es. corda agitata, luce)



ONDE LONGITUDINALI: quando lo spost. delle part. mat. avviene nella stessa dir. di propag. dell'onda
(es. molla compressa, suono in un gas)



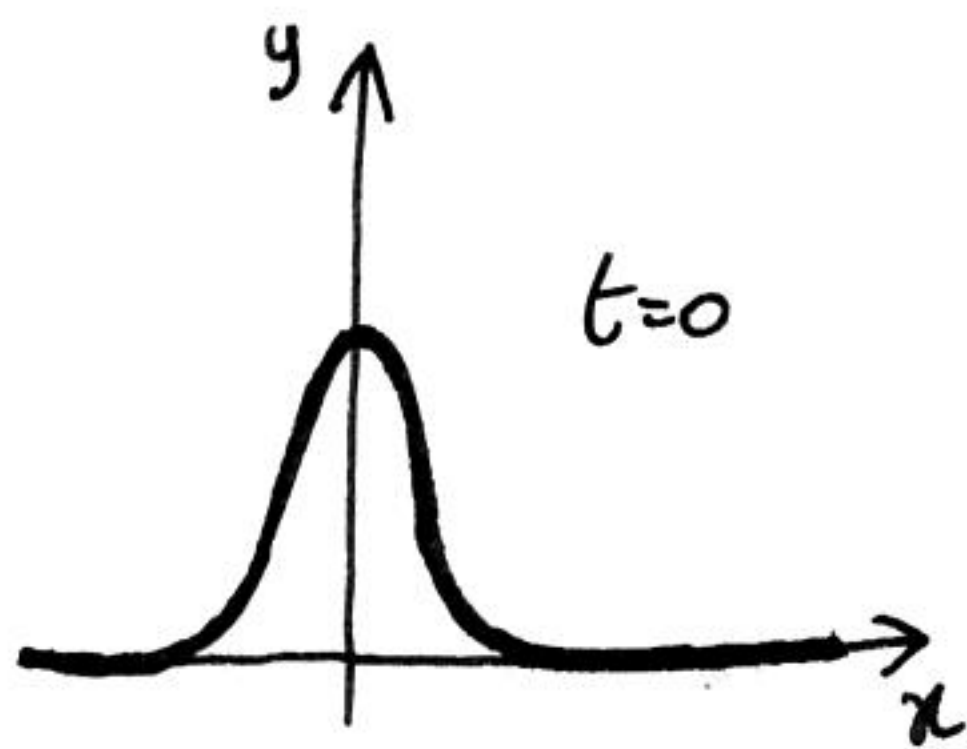
IMPULSO: quando trasmettiamo una singola onda

TRENO D'ONDE: quando trasmettiamo più onde una dopo l'altra; può essere PERIODICO o no

FRONTI D'ONDA: sono superfici che congiungono tutti i punti, sottoposti nello stesso istante alla stessa perturbazione; possono essere PIANI, SFERICI ecc. e sono perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda.

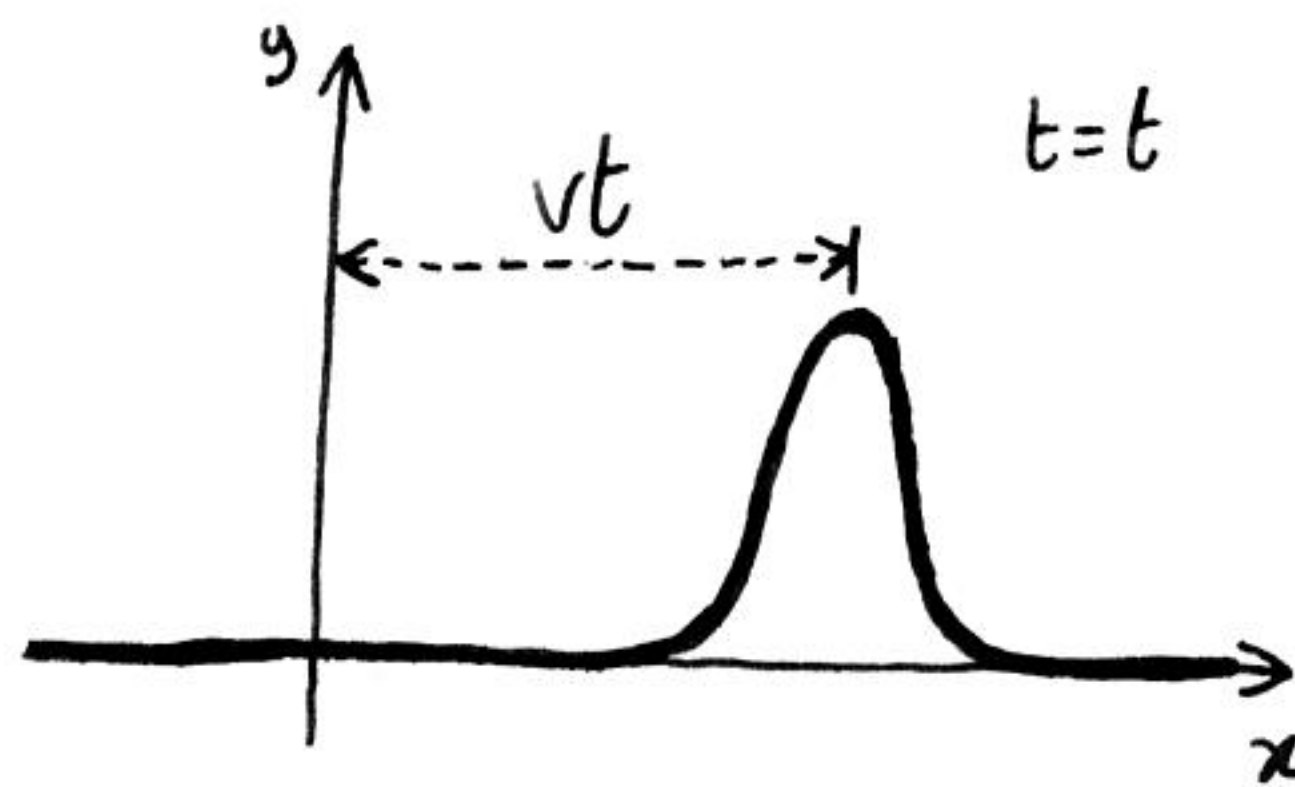
• PROPAGAZIONE DELLE ONDE •

Consideriamo una corda tesa lungo l'asse x , lungo la quale si propaga un'onda.



All'istante $t=0$, l'eq. della forma di tale onda è

$$y = f(x)$$



v è la velocità dell'onda; dopo un tempo t l'onda ha percorso un tratto vt

All'istante $t=t$, l'eq. dell'onda è $y = f(x - vt)$

($y = f(x + vt)$ se si stesse propagando verso sinistra)

Eq. di Propagazione di un'onda

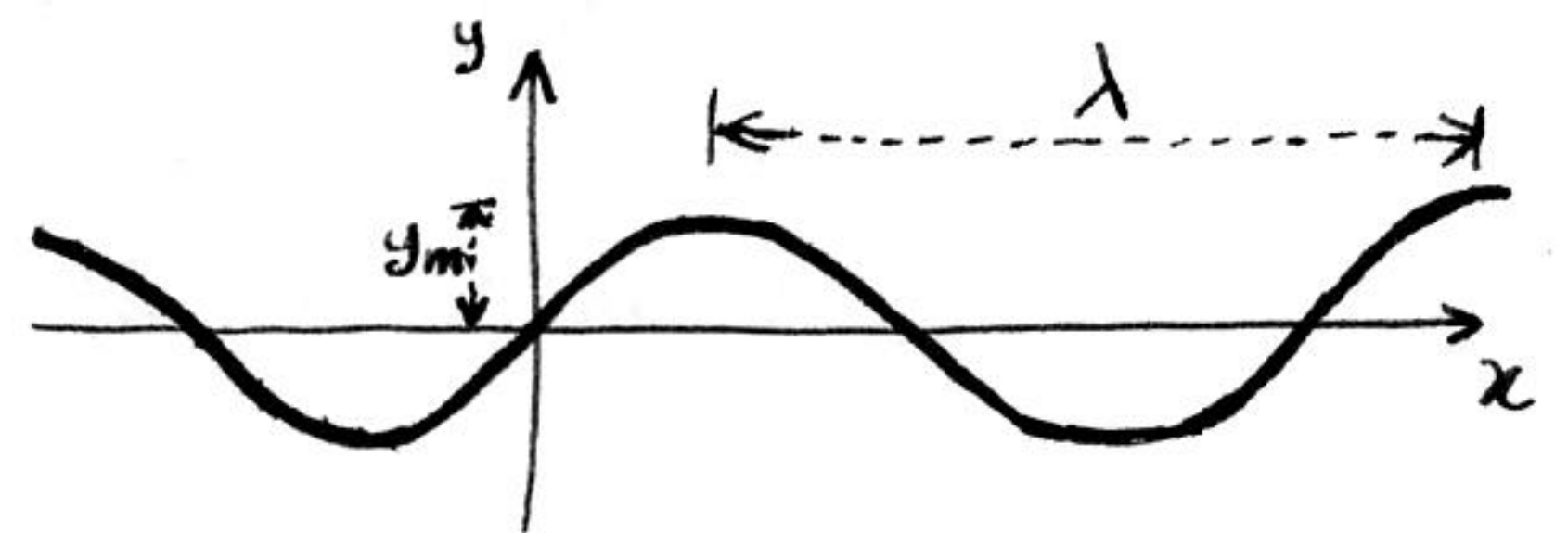
L'onda si propaga lungo la corda senza cambiare forma; se non c'è attrito - la forma dell'onda è definita dalla funzione $f(x)$.

Notare che, fissato un istante t , l'eq. ci dà la forma della corda in quel momento, e, fissato un punto x , l'eq. ci dà la posizione trasversale y di quel punto nel tempo.

Per una data fase di un'onda, $x - vt = \text{cost}$. Differenziando rispetto al tempo, si ha $\frac{dx}{dt} - v = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = v$ cioè v è proprio la VELOCITÀ DI FASE dell'onda.

Adesso consideriamo un treno d'onde sinusoidali

$$y = y_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$$



y_m = ampiezza (della sinusoide)

λ = lunghezza d'onda (del treno d'onde) = distanza fra i due punti dell'onda ^{più vicini} aventi la stessa fase.

Dopo un tempo t , l'onda si è spostata di vt e l'eq. è $y = y_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt)$

Si ha che periodo $T = \frac{\lambda}{v}$ perciò l'eq. diventa

$$y = y_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) = y_m \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{\lambda} vt \right) = y_m \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t \right)$$

Introduciamo il NUMERO D'ONDA $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$, inoltre sappiamo che freq. angolare $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

quindi si ha $y = y_m \sin (\kappa x - \omega t)$.

Come si vede, in un determinato istante y assume lo stesso valore per $x + n\lambda$, ed assume lo stesso valore anche all'istante $t + nT$ (dove $n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

Notare anche che essendo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$ e poiché $T = \frac{\lambda}{v}$
 $\rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = v$

Noi avevamo supposto che fosse $y=0$ per $t=0, x=0$; se non è così, l'espressione generale per il treno d'onde sinusoidale è $y = y_m \sin(kx - \omega t - \varphi)$, dove $\varphi = \text{costante di fase}$.

Consideriamo il punto $x = \frac{\pi}{k}$; in tale punto lo spostamento della corda è
 $y = y_m \sin(k \frac{\pi}{k} - \omega t - \varphi) = y_m \sin(\pi - \omega t - \varphi) = y_m \sin(\omega t + \varphi)$, che è l'eq. del moto armonico semplice.

Quindi, quando il treno d'onda si propaga nella corda, ogni suo elemento si muove trasversalmente di moto armonico semplice.

• PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE •

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE: Più onde possono passare x lo stesso punto agendo indipendentemente l'una dall'altra; lo spostamento della particella in quel punto è la somma vettoriale degli spostamenti che le singole onde produrrebbero.

Tale principio è valido solo quando la relazione tra deformazione e forza di richiamo, è di semplice proporzionalità; cioè espressa mediante un'eq. lineare. Quando la perturbazione è molto grande, l'eq. non è lineare e tale principio non è valido (esempio: esplosione).

Qualsiasi forma d'onda periodica può essere costruita mediante la somma di più onde armoniche semplici:

$$y(t) = A_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + A_3 \sin 3\omega t + \dots + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + \dots$$

(SERIE DI FOURIER)

{ PEZZO NON DISPERSIVO
 (la velocità di un'onda armonica non dipende dalla frequenza)

{ PEZZO DISPERSIVO

 { LINEARE
 (il modo di propagazione di un'onda non dipende dall'ampiezza)

 { NON LINEARE

ONDA ATTENUATA : quando la forma dell'onda varia nel tempo a causa della perdita d'energia meccanica dovuta agli attriti

* Abbiamo detto che la velocità di un'onda dipende da elasticità e inerzia del corpo perturbato.

Per una corda tesa:

l'elasticità è tanto maggiore quanto maggiore è la tensione F della corda
 l'inerzia dipende dalla massa per unità di lunghezza, μ

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

* La freq. di un'onda dipende dalla freq. della sorgente

* Per la lunghezza d'onda, sappiamo che $T = \frac{\lambda}{v}$, perciò

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}$$

Un'onda sinusoidale viene prodotta in una corda tesa da una sbarra che alza e abbassa l'estremità della corda di $0,5 \text{ cm}$, continuamente 120 volte al secondo; la corda ha una densità lineare di $0,25 \text{ kg/m}$ ed una tensione di 90 N .

* Calcolare velocità, ampiezza, frequenza e lunghezza d'onda del moto ondulatorio.

La sbarra muove l'estremità della corda di $0,5 \text{ cm}$ dal punto più alto a quello più basso, perciò l'ampiezza è $y_m = 0,25 \text{ cm} = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

La frequenza è ovviamente 120 volte al secondo, ossia $\nu = 120 \text{ Hz}$.

La velocità è data da $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{90 \text{ N}}{0,25 \text{ kg/m}}} = 19 \text{ m/s}$.

La lunghezza d'onda è data da $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{19 \text{ m/s}}{120 \text{ Hz}} = 16 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

* Scrivere l'equazione dell'onda supponendo che essa si muova da sinistra a destra e che per $t=0$ sia $x=0, y=0$.

L'eq. generale è $y = y_m \sin(kx - \omega t - \varphi)$.

Per $t=0, x=0, y=0$ l'eq. è $0 = y_m \sin(-\varphi)$, e questo ci dice che la fase φ deve essere nulla.

Abbiamo $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{16 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 39 \text{ m}^{-1}$

e abbiamo anche $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 120 \text{ Hz} = 754 \text{ Hz}$.

Perciò l'eq. richiesta è $y = (0,25 \cdot 10^{-2}) \sin(39x - 754t)$

con x, y in metri e t in secondi.

INTERFERENZA delle onde: indica l'effetto fisico della sovrapposizione di onde.

1) onde di uguale frequenza ed ampiezza (propagantesi nella stessa direzione)

Consideriamo due onde ^{sinusoidali} di uguale frequenza e ^{e stessa velocità} ampiezza, propagantesi nella stessa direzione, con una differenza di fase φ . Le loro eq. saranno:

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = y_m \sin(kx - \omega t - \varphi)$$

$$\left(\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Sommando queste due onde, si ottiene l'onda risultante (che è ancora sinusoidale):

$$y = y_1 + y_2 = y_m [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t - \varphi)] =$$

$$= y_m \left[2 \sin \frac{2kx - 2\omega t - \varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right] = 2y_m \cos \frac{\varphi}{2} \sin \left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2} \right)$$

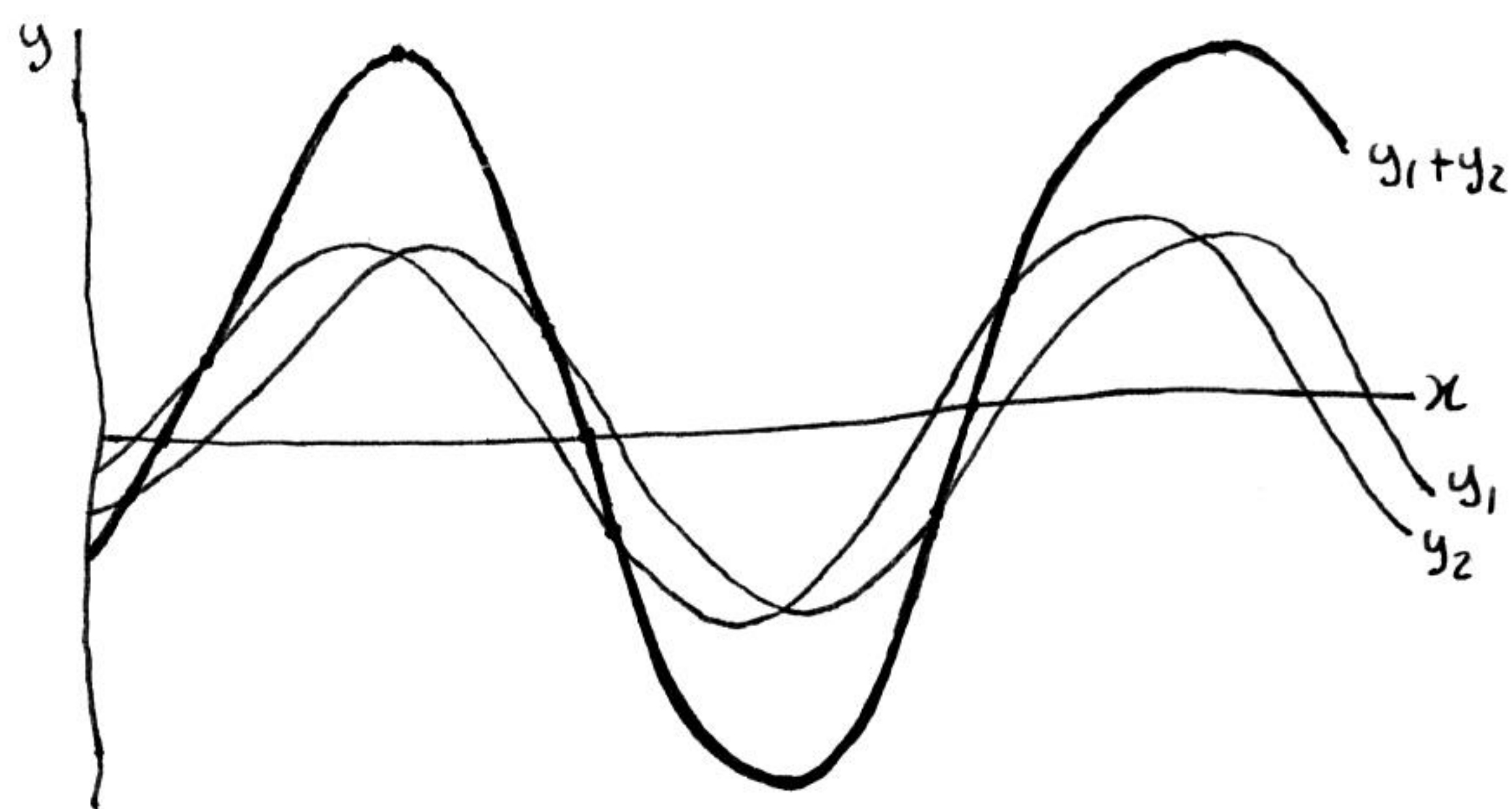
Si vede che per $\varphi = 0^\circ \rightarrow \cos \frac{\varphi}{2} = \cos 0^\circ = 1 \rightarrow \text{ampiezza} = 2y_m$ (massima)

e per $\varphi = 180^\circ \rightarrow \cos \frac{\varphi}{2} = \cos 90^\circ = 0 \rightarrow \text{ampiezza} = 0$ (minima)

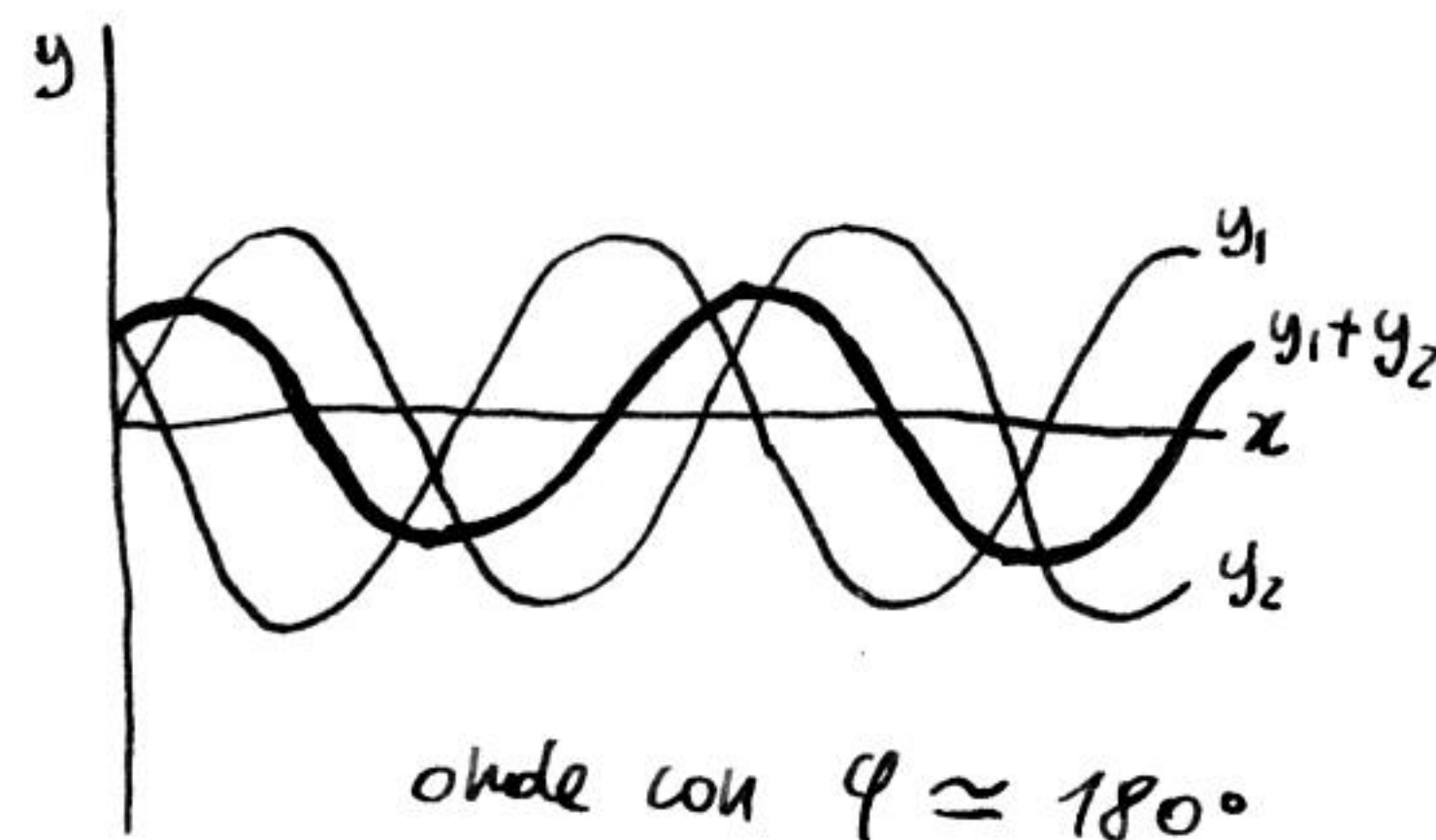
e per valori intermedi di φ , l'ampiezza assume valori intermedi e aumenta con l'aumentare di φ a zero, cioè all'aumentare del grafico delle due onde.

Per $\varphi = 0^\circ$, il massimo di y_1 coincide col massimo di y_2 e l'ampiezza risultante è massima (interferenza costruttiva)

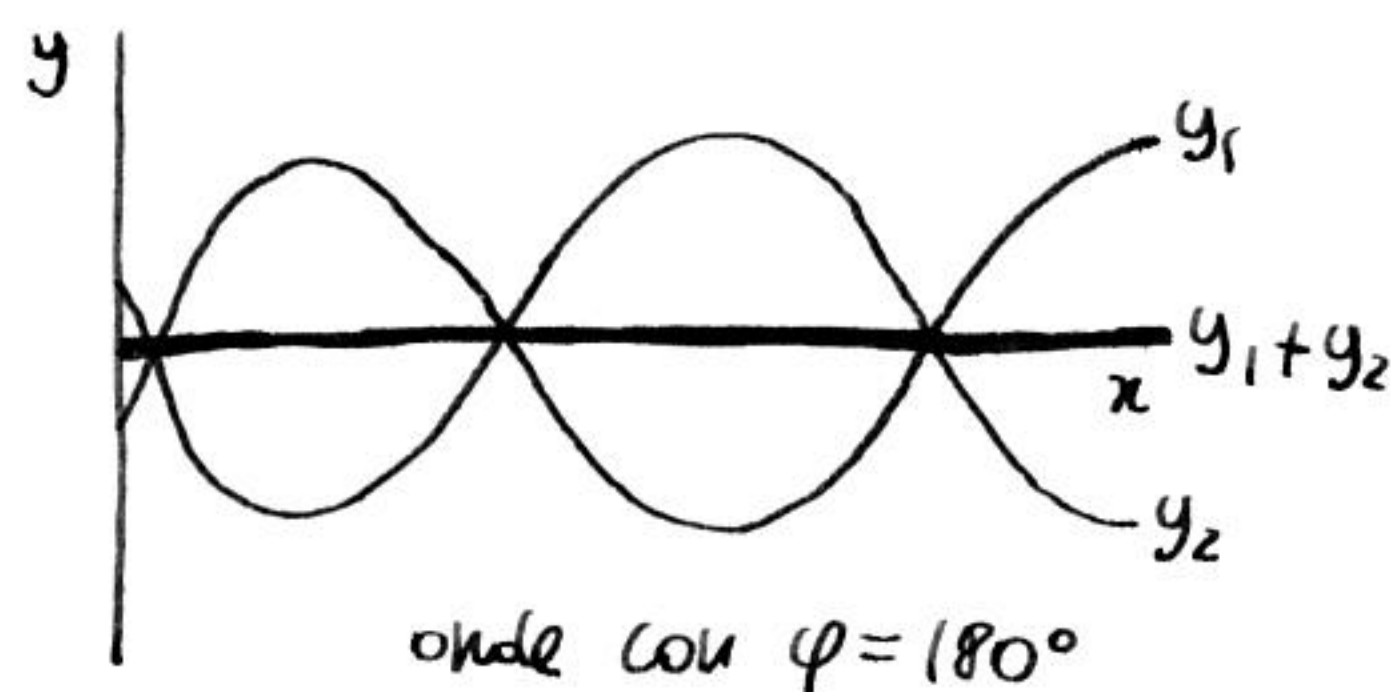
Per $\varphi = 180^\circ$, il max di y_1 coincide col min di y_2 e viceversa, e l'ampiezza risultante è nulla (interferenza distruttiva); in ogni punto l'ampiezza di y_1 è uguale all'opposto dell'ampiezza di y_2 , e l'ampiezza risultante è nulla in ogni punto.



onde con φ prossimo a 0°



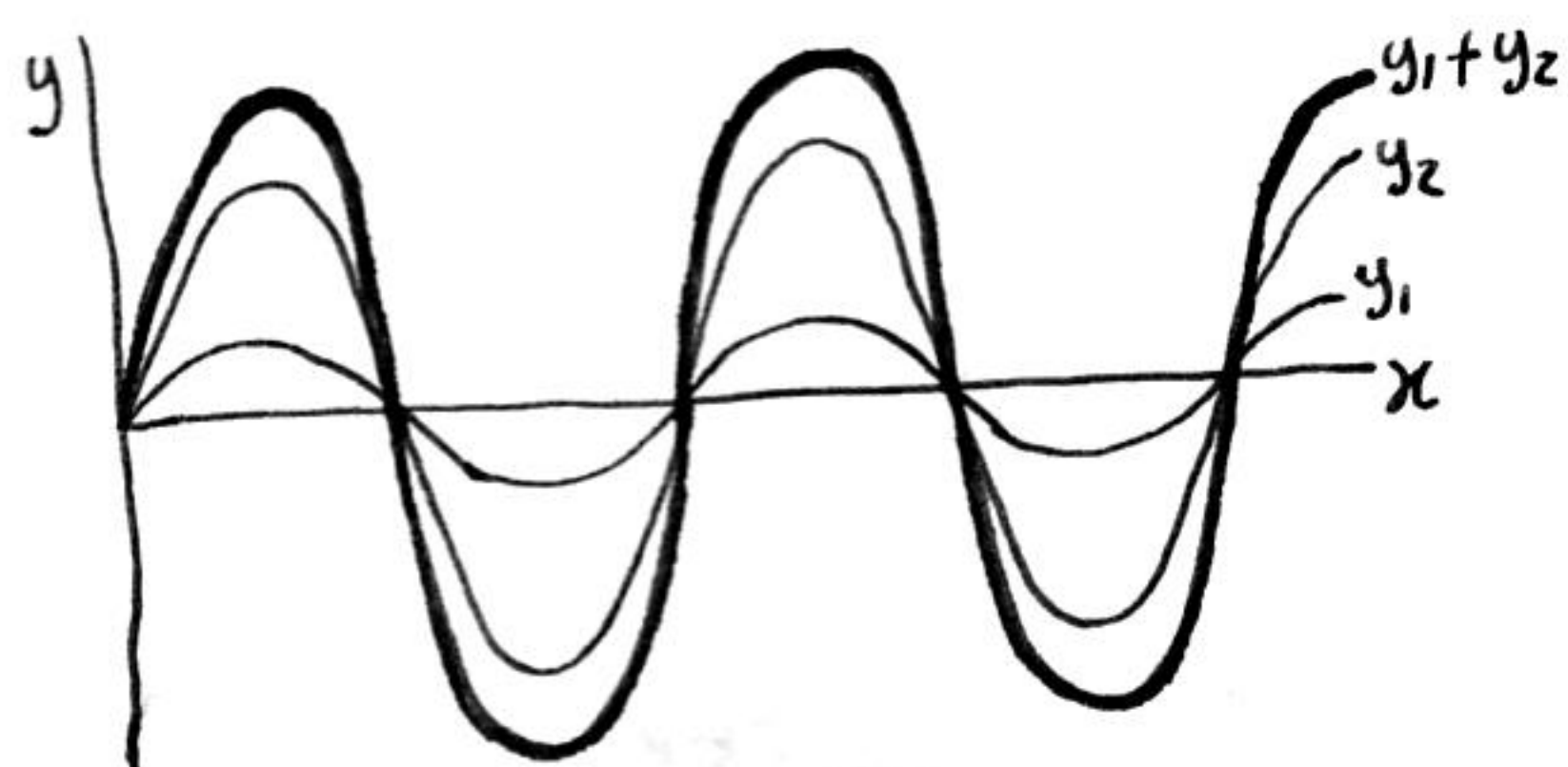
onde con $\varphi \approx 180^\circ$



onde con $\varphi = 180^\circ$

2) onde di uguale frequenza e diversa ampiezza (propaganti nella stessa direzione)

La sovrapposizione di due o più onde sinusoidali di uguale frequenza e diversa ampiezza propaganti nella stessa direzione e ancora un'onda sinusoidale ^(qualunque sia la fase). L'ampiezza di tale onda dipende dalla fase delle onde componenti.



qui le due onde componenti hanno stessa frequenza e stessa fase: l'onda risultante ha ancora la stessa frequenza e fase delle due

Torniamo alle eq. delle due onde componenti:

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = y_m \sin(kx - \omega t - \varphi) = y_m \sin\left(k\left(x - \frac{\varphi}{k}\right) - \omega t\right)$$

comparando le due eq., si vede che a qualsiasi istante la distanza ^{nell'asse x} fra le due onde è $\frac{\varphi}{k}$.

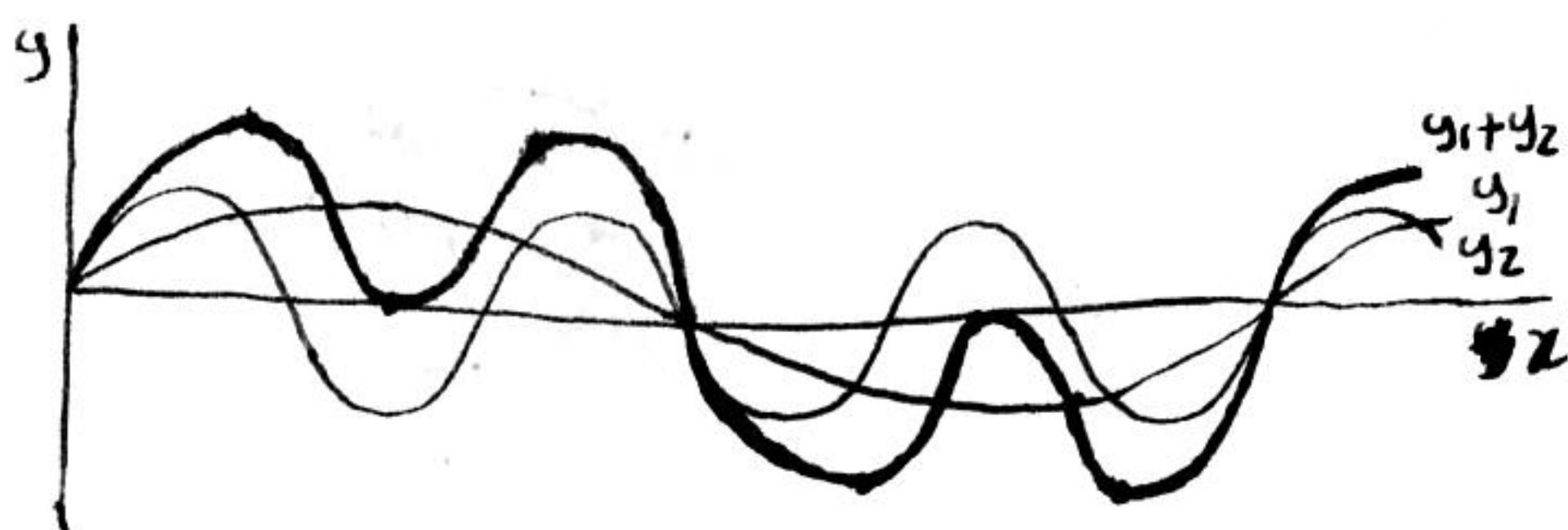
Perciò vi è interferenza costruttiva per $\frac{\varphi}{k} = n\lambda$ ossia $\varphi = 2n\pi$

interferenza distruttiva per $\frac{\varphi}{k} = (n + \frac{1}{2})\lambda$ ossia $\varphi = (2n + 1)\pi$

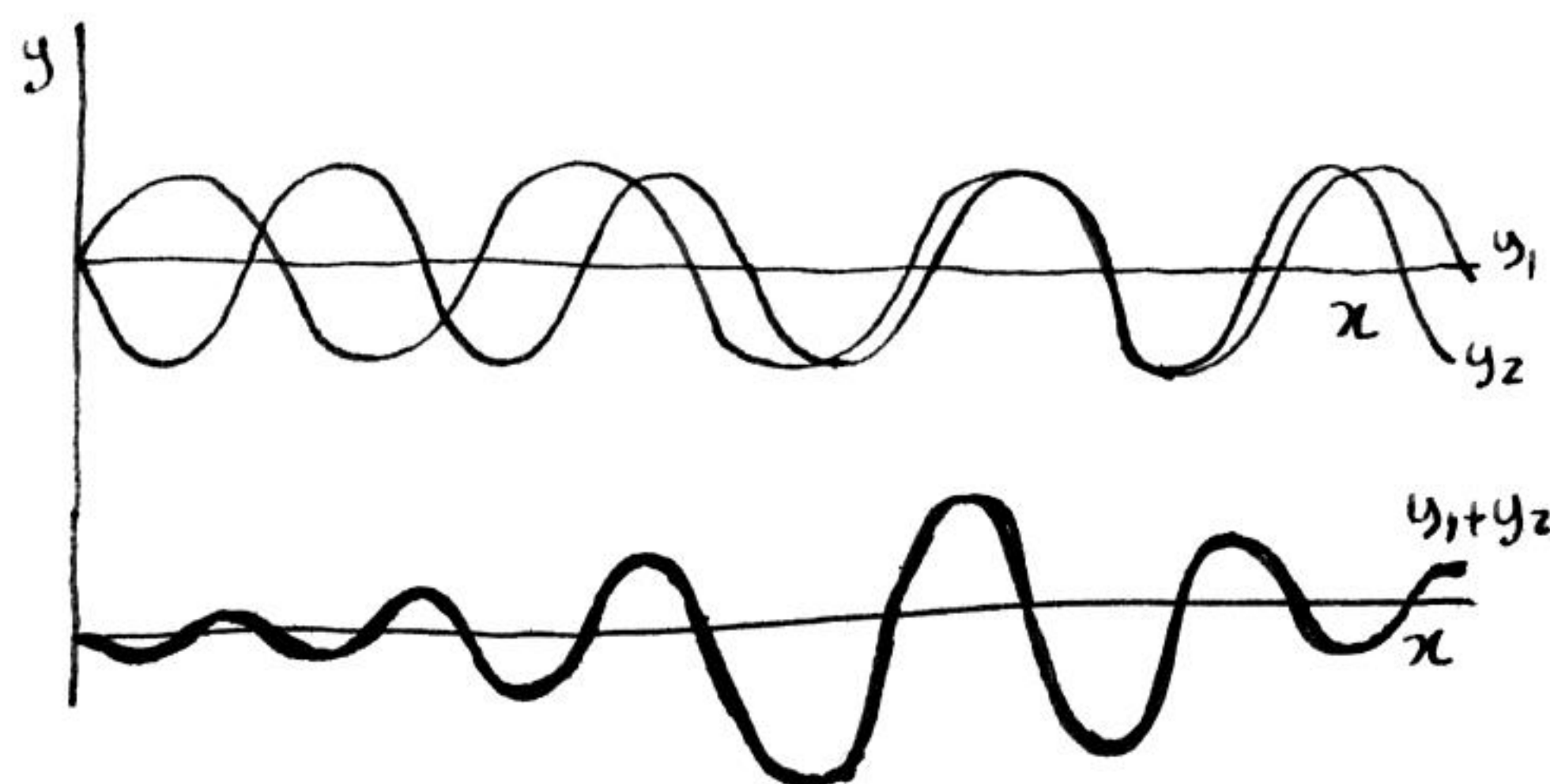
$n = \dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

3) ~~onde~~ onde di diversa frequenza (propaganti nella stessa direzione)

La sovrapposizione di tali onde dà luogo a un'onda COMPLESSA: le particelle non si muovono più di moto armonico semplice e l'onda non è più sinusoidale.



la forma dell'onda cambia parecchio se variano la fase φ



la somma di due onde di frequenza quasi uguali produce il fenomeno dei BATTIMENTI

TUTTE LE ONDE VISTE FIN QUI SI PROPAGANO NELLA STESSA DIREZIONE E ALLA STESSA VELOCITÀ.

onde STAZIONARIE

Consideriamo due treni d'onde di uguale frequenza, ampiezza e velocità propagantesi in versi opposti, una contro l'altra (e' cio' che accade in una corda tesa ~~propagantesi~~ ~~tra~~ tra due fermi e posta in oscillazione, dove le onde che arrivano a un fermo vengono riflesse e formano l'antidetto).

Le eq. di tali onde sono

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = y_m \sin(kx + \omega t)$$

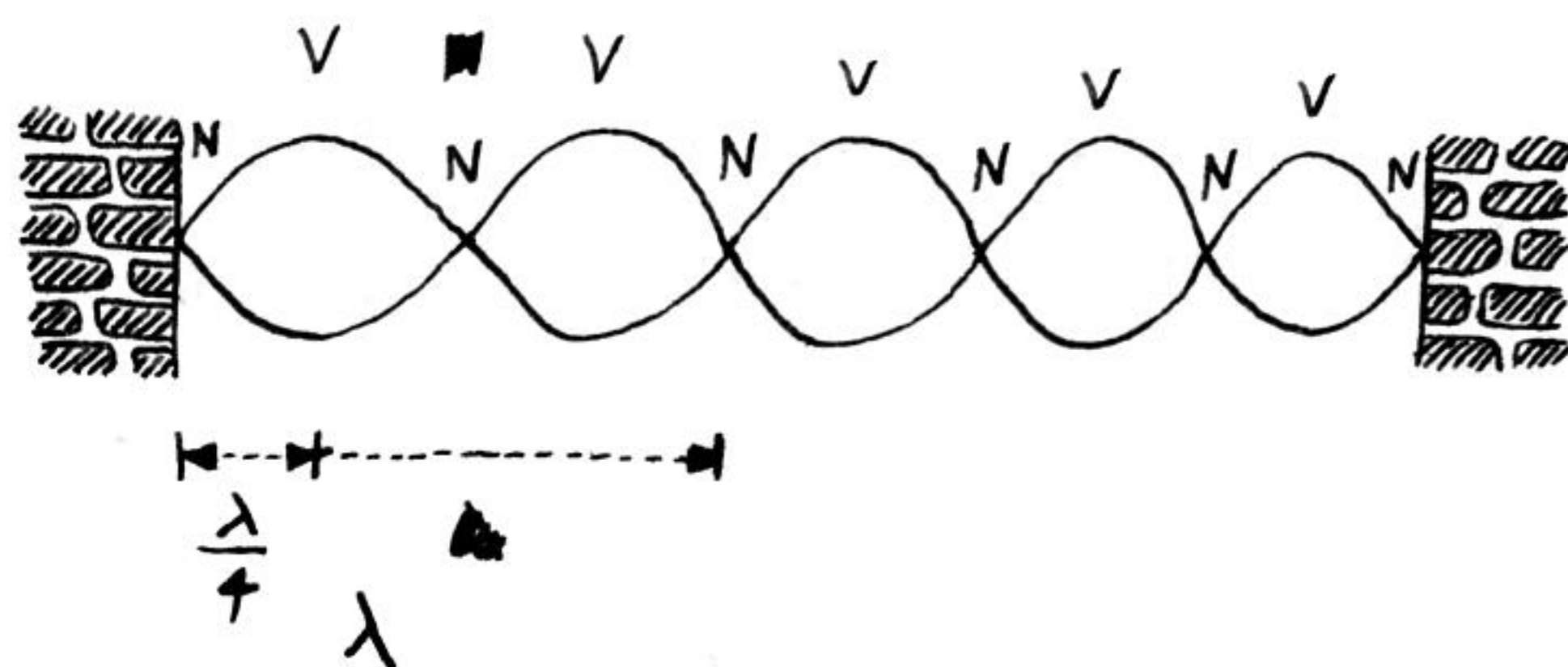
e la risultante e' quindi:

$$y = y_1 + y_2 = y_m [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] = y_m \left[2 \sin \frac{2kx}{2} \cos \frac{-2\omega t}{2} \right] =$$
$$= \boxed{2y_m \sin kx \cos \omega t} \quad \text{EQ. DI UN'ONDA STAZIONARIA}$$

In un'onda stazionaria tutte le particelle vibrano di moto armonico semplice e con la stessa frequenza, ma l'ampiezza varia da particella a particella.

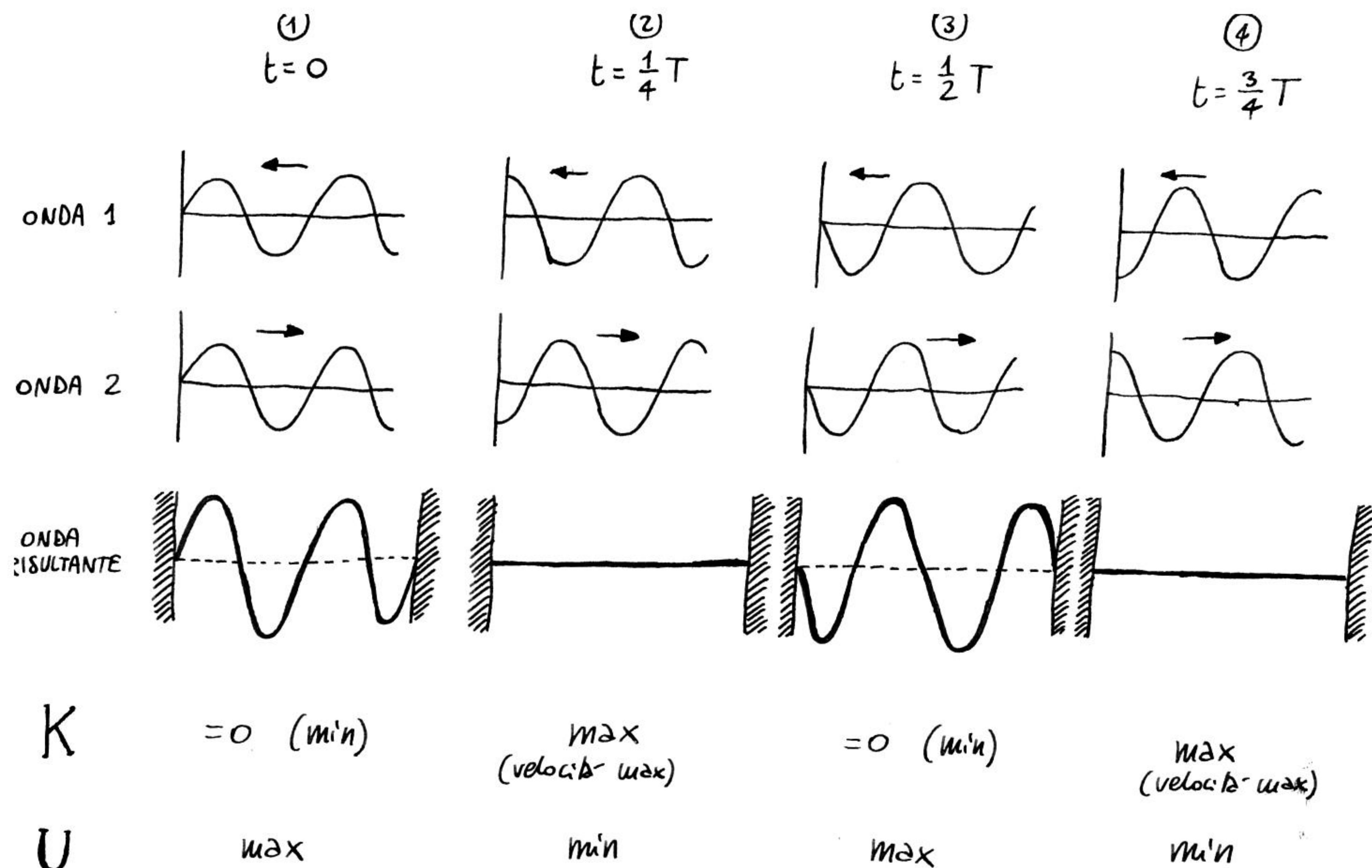
Ampiezza max ($= 2y_m$) per $\sin kx = 1 \rightarrow kx = \frac{\pi}{2} + n\pi \rightarrow x = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2}$ VENTRI

Ampiezza min ($= 0$) per $\sin kx = 0 \rightarrow kx = n\pi \rightarrow x = n \frac{\lambda}{2}$ NODI
 $n = \dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$



L'onda e' chiamata stazionaria perche' non c'e' trasporto di energia (l'energia non puo' attraversare i nodi, che sono fermi) lungo la corda.

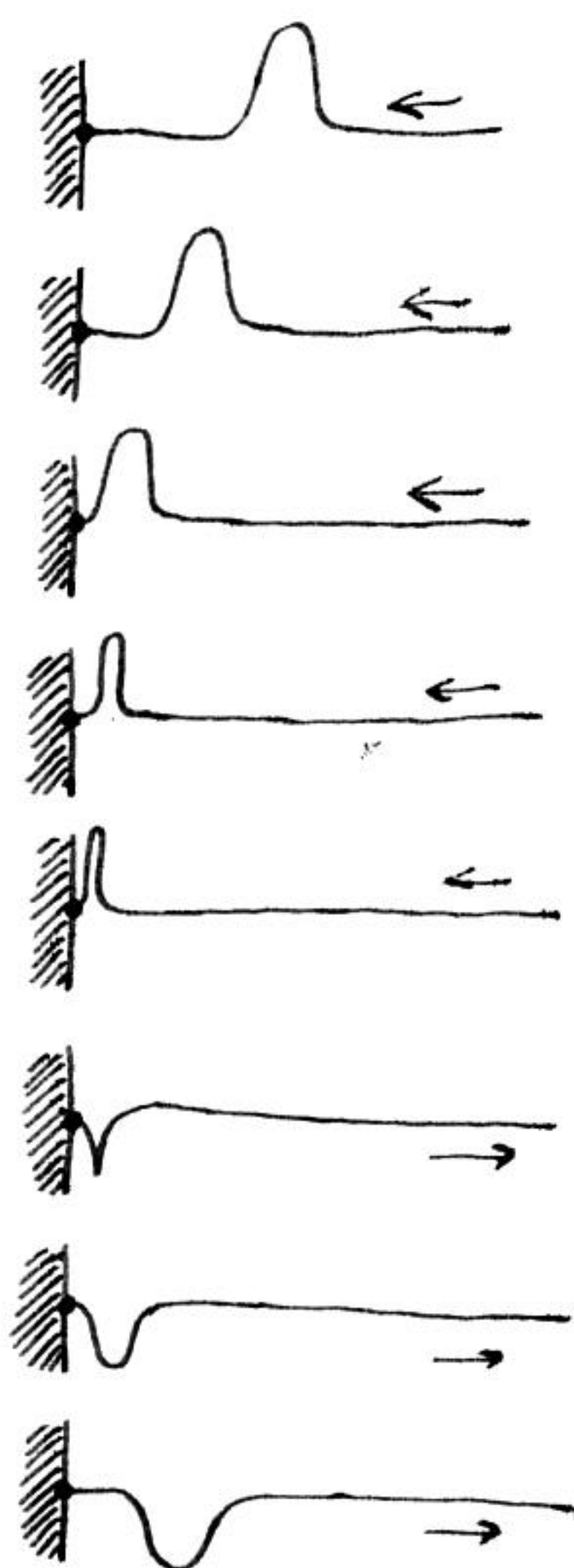
la distanza
tra due nodi
e' $\frac{\lambda}{2}$



Dopo la fase ④, si ricomincia con la ① e così via.

In ② e ④, la corda ha la max velocità verticale.

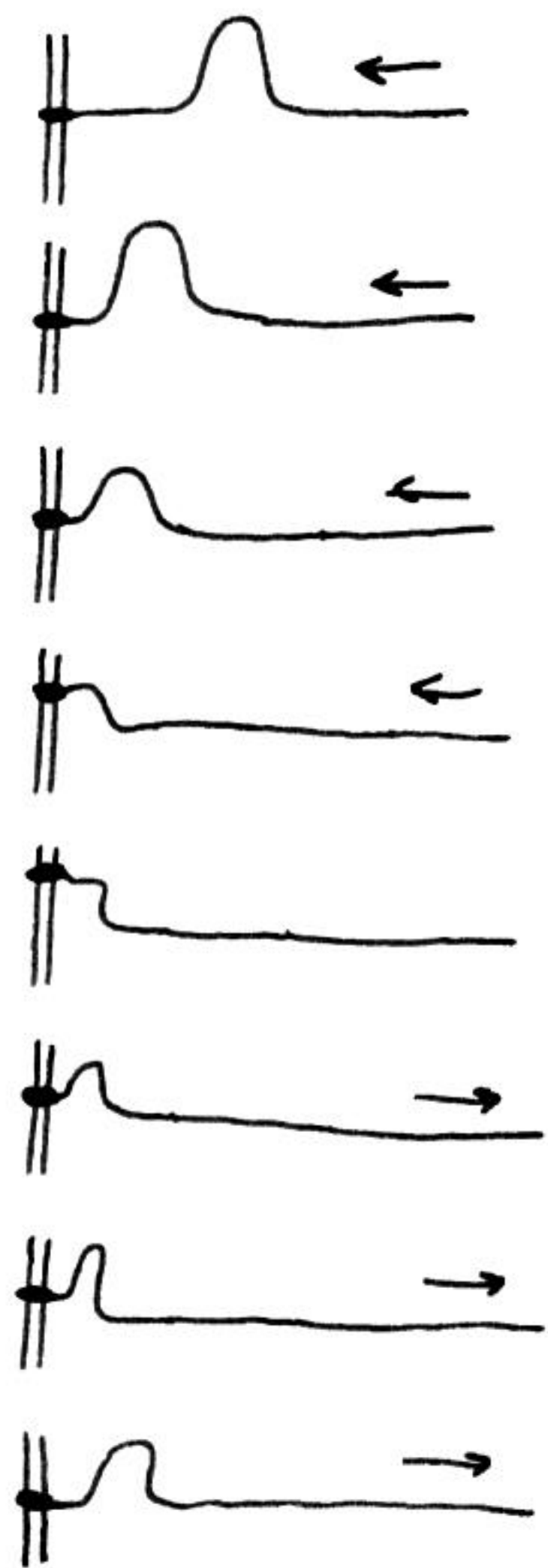
In ② e ④, l'energia è ~~potenziale~~ tutta cinetica. In ① e ③, è tutta potenziale. Negli stati intermedi, l'energia è parte cinetica e parte potenziale.



Un impulso che si propaga lungo una corda tesa e fissa a un'estremità, quando arriva al fermo esercita su esso una forza verticale. Il fermo è fisso e non si muove, e per reazione esercita sulla corda una forza uguale e contraria, producendo così un impulso capovolto e che si propaga in verso opposto.

Lo spostamento di ogni punto della corda è dato dalla somma vettoriale degli spostamenti dovuti all'onda incidente e all'onda riflessa, o un treno d'onde.

Il fermo è fisso, perciò lo spostamento deve essere zero in quel punto. Perciò ~~l'onda riflessa è sfasata di 180° rispetto a quella incidente~~ l'onda riflessa è sfasata di 180° rispetto a quella incidente, nell'estremità, dove si ha ~~un nodo~~ quindi un nodo (le due onde interferiscono distruttivamente).



Nel caso di una corda libera di muoversi all'estremità, l'onda incidente produce uno spostamento verticale dell'estremità verso l'alto, e viene riflessa in verso opposto. All'estremità lo spostamento è massimo; l'onda riflessa deve quindi essere in fase con l'onda incidente, e si ha un ventre all'estremità (dove le due onde interferiscono costruttivamente).

Attaccando una corda ~~alla~~ ad un'altra, e propagandovi un impulso, nel punto di giunzione non vi sarà un nodo perché l'onda della 1ª corda viene parzialmente trasmessa alla 2ª; se μ 1ª corda $>$ μ 2ª corda, l'impulso viene parzialmente riflesso in fase; se μ 1ª corda $<$ μ 2ª corda, viene parzialmente riflesso spasato di 180°. Notare che la velocità dell'onda trasmessa nella 2ª corda (che ha μ diversa dalla 1ª) sarà differente, perché $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

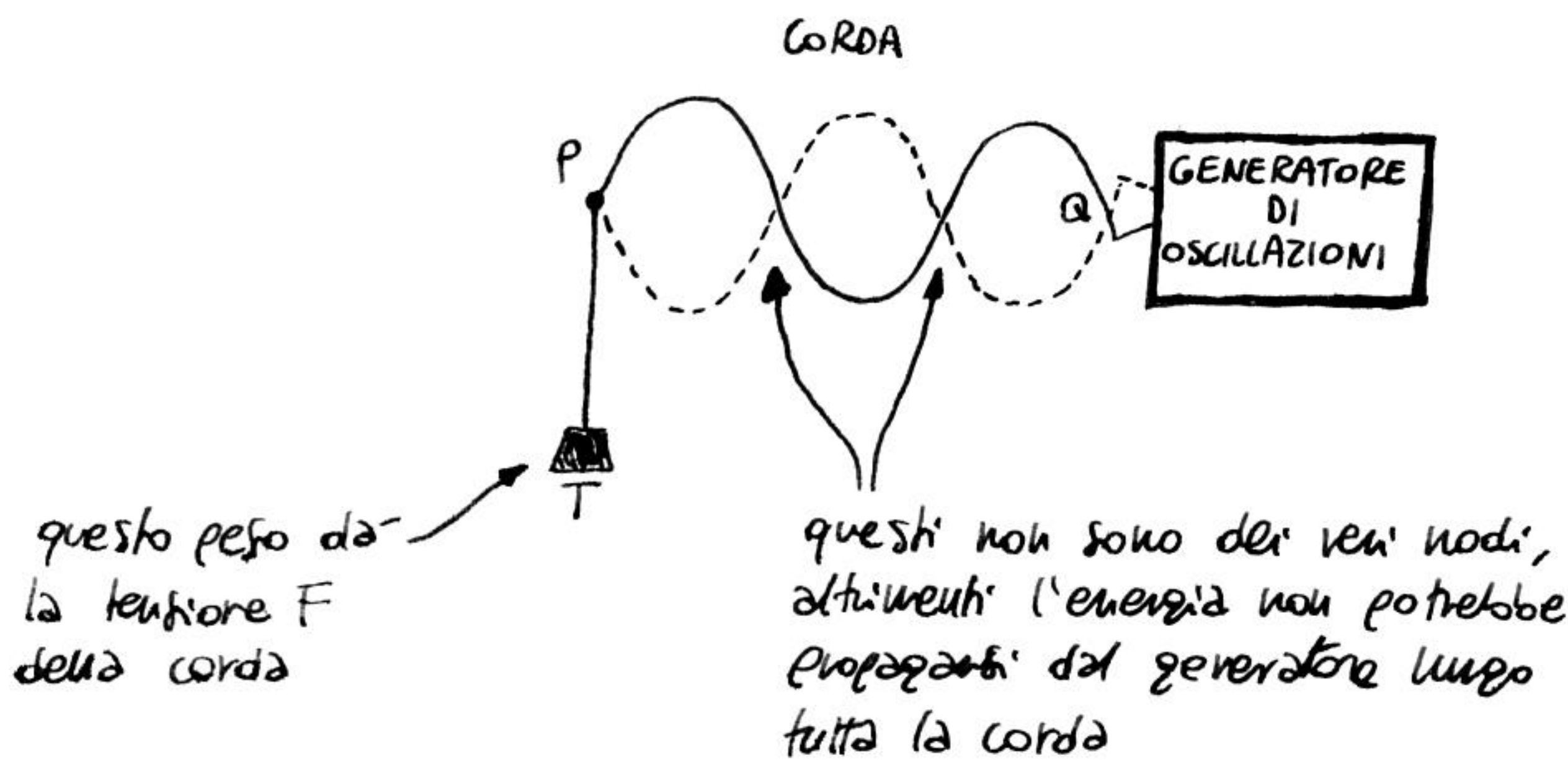
RISONANZA: e' il fenomeno per il quale, quando un sistema atto a oscillare e' sottoposto a una serie periodica di impulsi di frequenza simile alla sua frequenza naturale, esso si mette a oscillare con ampiezza relativamente grande (entra in risonanza).

In una corda lunga l fissa tra due estremi possono esserci un numero intero di nodi n , che sappiamo distano fra loro $\frac{\lambda}{2}$.

Sara' percio' $n \frac{\lambda}{2} = l \rightarrow \lambda = \frac{2l}{n}$. Sappiamo anche che $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

Quindi essendo $\lambda = \frac{v}{\nu} \rightarrow \nu = \frac{v}{\lambda} \rightarrow \boxed{\nu = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$ Frequenze proprie di oscillazione del sistema-corda per $n = 1, 2, 3, \dots$

Nel sistema corda ogni porzione della corda ha inerzia e elasticita' (elementi distribuiti), mentre in un sistema molla-massa l'elasticita' e' caratteristica della molla e l'inerzia e' caratteristica della massa (elementi concentrati). Percio' il sistema molla-massa ha una sola frequenza propria.



P e' un nodo, in Q le oscillazioni hanno piccola ampiezza.

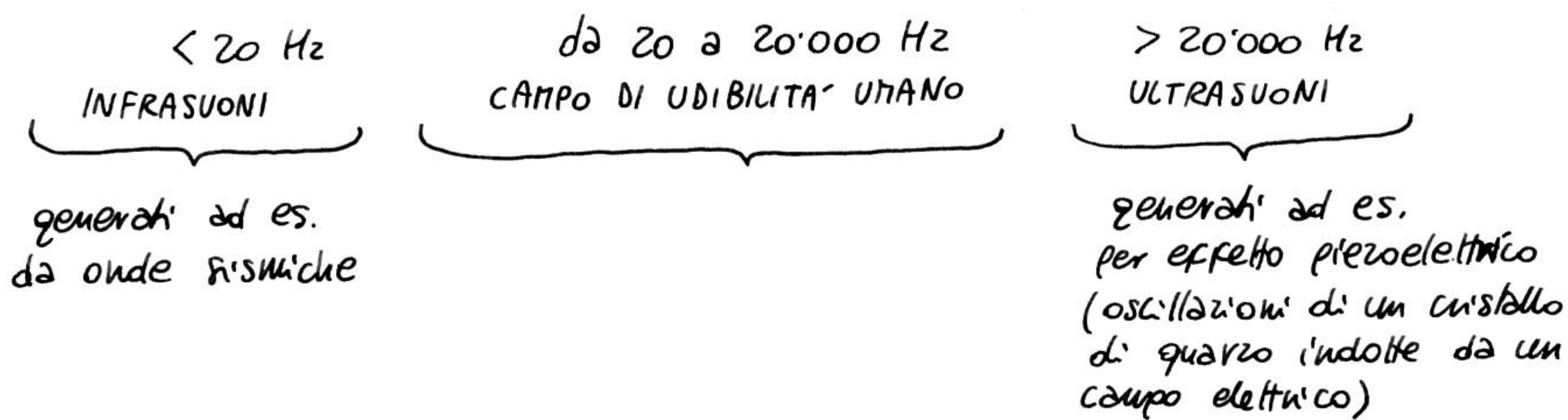
Il generatore esegue lavoro sulla corda per mantenerla in oscillazione nonostante lo smorzamento.

Se la frequenza del generatore fosse molto diversa da quella propria della corda, l'onda sarebbe in fase in P molto sfasata, e ritornando in Q compirebbe lavoro sul generatore.

Migliore e' lo smorzamento, e piu' la frequenza degli impulsi e' vicina a quella naturale del sistema, allora piu' e' grande l'ampiezza di oscillazione (che in teoria* puo' arrivare a essere ∞). Se l'ampiezza diventa molto piu' grande di quella che puo' sopportare il sistema, si esce dalla regione di proporzionalita' della legge di Hooke e il sistema si rompe. (Il ponte Tacoma e' stato distrutto da una debole brezza che aveva frequenza uguale a quella del ponte).

20 ONDE SONORE

Le onde sonore sono onde meccaniche longitudinali.



onde periodiche o composte da un piccolo numero di onde periodiche $\Rightarrow$ "MUSICA" (piacevole)

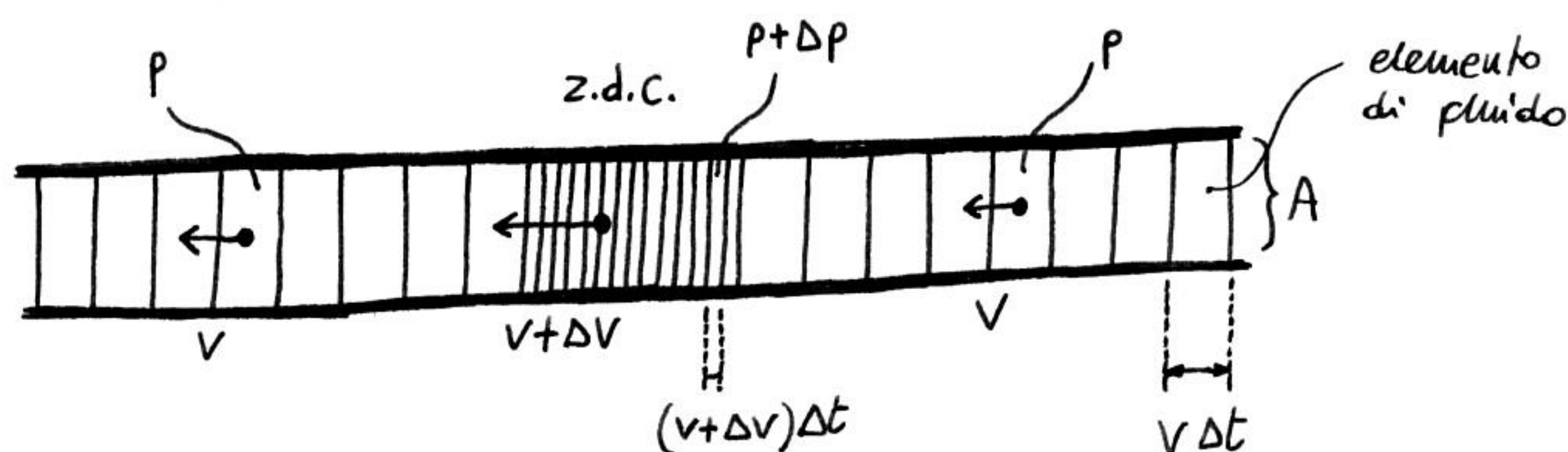
onde non periodiche o composte da un grande numero di onde periodiche $\Rightarrow$ "RUMORE"



Spingendo il pistone, lo strato davanti ad esso viene compresso, e compaiono i successivi strati di fluido; un impulso di compressione percorre il ~~tubo~~ fluido nel tubo.

Tirando il pistone, questo rarefa lo strato adiacente e un impulso di rarefazione percorre il tubo.

Z.d.c. = zona di compressione



Consideriamo un impulso di compressione che viaggia a velocità V verso destra in un fluido ~~in quiete~~ in quiete dentro a un tubo orizzontale.

Poniamoci in un sist. di rif. solidale con l'impulso: avremo una Z.d.c. (zona di compressione) ferma e il fluido che, viaggiando verso sinistra a velocità V , entra ed esce dalla Z.d.c.

Un elemento di fluido che viaggia verso ~~destra~~ ^{sinistra} a velocità V , entrando nella Z.d.c., è sottoposto a una differenza di pressione Δp tra la sua faccia anteriore e posteriore, e questo determina una sua decelerazione che lo rallenta a velocità $V + \Delta V$ ($\Delta V < 0$). La forza che agisce ~~sul~~ ^{sulla} l'entrata è $F = (p + \Delta p)A - pA = \Delta p A$, diretta verso destra.

All'uscita della Z.d.c., la lunghezza dell'elemento di fluido è $V \Delta t$
il ~~volume~~ suo volume è $V \Delta t A$
e la sua massa è $V \Delta t A \rho$.

La decelerazione subita dall'elemento di fluido entrando nella Z.d.c. è $a = -\frac{\Delta V}{\Delta t}$, diretta verso destra.

Inoltre, la variazione del volume $V = V \Delta t A$ dell'elemento, quando entra nella Z.d.c., è $\Delta V = \Delta V \Delta t A$; perciò $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V \Delta t A}{V \Delta t A} = \frac{\Delta V}{V}$.

In conclusione, si ha dalla formula $F = ma$:

$$F = ma$$

$$\Delta p A = V \Delta t A \rho \left(-\frac{\Delta V}{\Delta t} \right) \rightarrow \Delta p = -V \rho \Delta V \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho V = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} \rightarrow \rho V^2 = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} \rightarrow \rho V^2 = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}.$$

Chiamiamo

$$-\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} = B \quad \text{Modulo di compressione del corpo}$$

$$\left(\text{per un gas } \rho V^2 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}} \right)$$

B = proprietà elastiche
 ρ = proprietà inerziali

Per cui $\rho V^2 = B \rightarrow$

$$V = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

velocità dell'impulso nel fluido

Come il treno di compressioni e rarefazioni si propaga lungo il tubo, ogni elemento di volume oscilla avanti e indietro, longitudinalmente alla direzione di propagazione dell'onda di compressione o rarefazione; chiamiamo y tale spostamento (ATTENZIONE: E' LONGITUDINALE alla direzione di propagazione).

L'eq. di un'onda longitudinale propagantesi verso destra sarà

$$y = f(x - vt)$$

e, nel caso particolare di oscillazioni armoniche semplici,

$$y = y_m \cos(kx - \omega t) \quad (*) \quad \text{come già visto precedentemente.}$$

Essendo $B = - \frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}$, si avrà $\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}$ variazione di pressione rispetto alla pressione di equilibrio

Se uno strato di fluido a pressione di equilibrio ha spessore Δx e sezione A , il suo volume è $V = A \Delta x$; quando la pressione varia, il suo volume varierà di $\Delta V = A \Delta y$ dove Δy è la variazione di spessore dello strato di fluido.

Perciò $\frac{\Delta V}{V} = \frac{A \Delta y}{A \Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Quindi $\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V} = -B \frac{\Delta y}{\Delta x}$ e, per $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta p = -B \frac{\partial y}{\partial x}$ (derivata parziale rispetto alla x)

Deriviamo l'eq. (*) rispetto alla x ; otteniamo

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -k y_m \sin(kx - \omega t)$$

Quindi $\Delta p = -B \frac{\partial y}{\partial x} = B k y_m \sin(kx - \omega t)$

Sappiamo inoltre che $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$ e quindi $B = v^2 \rho$

Quindi si ottiene ancora $\Delta p = \underbrace{v^2 \rho k y_m}_{\downarrow} \sin(kx - \omega t)$

questa quantità è la max variazione di pressione e la chiamiamo AMPIEZZA DI PRESSIONE P

Quindi $\Delta p = P \sin(kx - \omega t)$.

Quindi un'onda sonora può venire considerata sia come un'onda di spostamento che come un'onda di pressione, sfasata di 90° rispetto all'onda di spostamento. (Quindi a un nodo di spostamento corrisponde un ~~ventre~~ ventre di pressione e viceversa).

L'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza di spostamento, come visto in precedenza. Ora abbiamo visto che l'ampiezza di pressione è proporzionale al max spostamento. Quindi l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza di pressione.

Perciò, misurando le variazioni di pressione, si possono calcolare intensità di onde sonore di frequenza diversa.

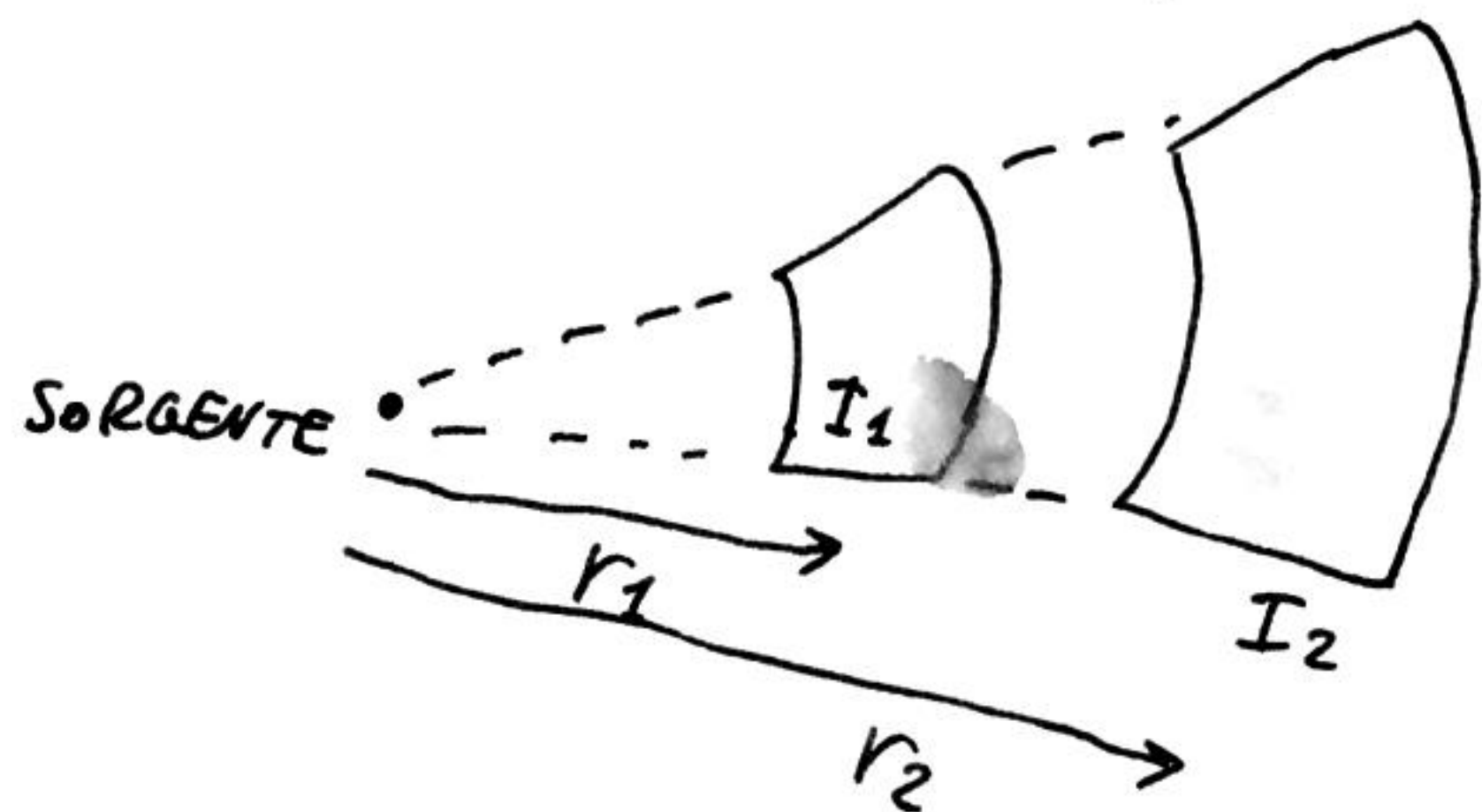
Onde sonore stazionarie:

Consideriamo delle onde sonore longitudinali che si propagano dentro un tubo pieno di gas. All'estremità del tubo si ha un:

nodo se il tubo è chiuso, perché la somma vettoriale degli spostamenti di onda incidente e onda riflessa deve essere zero

ventre se il tubo è aperto
e, in pratica, se il diametro del tubo è piccolo rispetto alla lunghezza d'onda del suono, come avviene negli strumenti musicali.

L'intensità dell'onda è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza:



$$\begin{array}{ccccc} \text{potenza} & \text{ampiezza} & \text{intensità sonora} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ P = & 4\pi r_1^2 & I_1 & = & 4\pi r_2^2 I_2 \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad \text{C.V.D.}$$

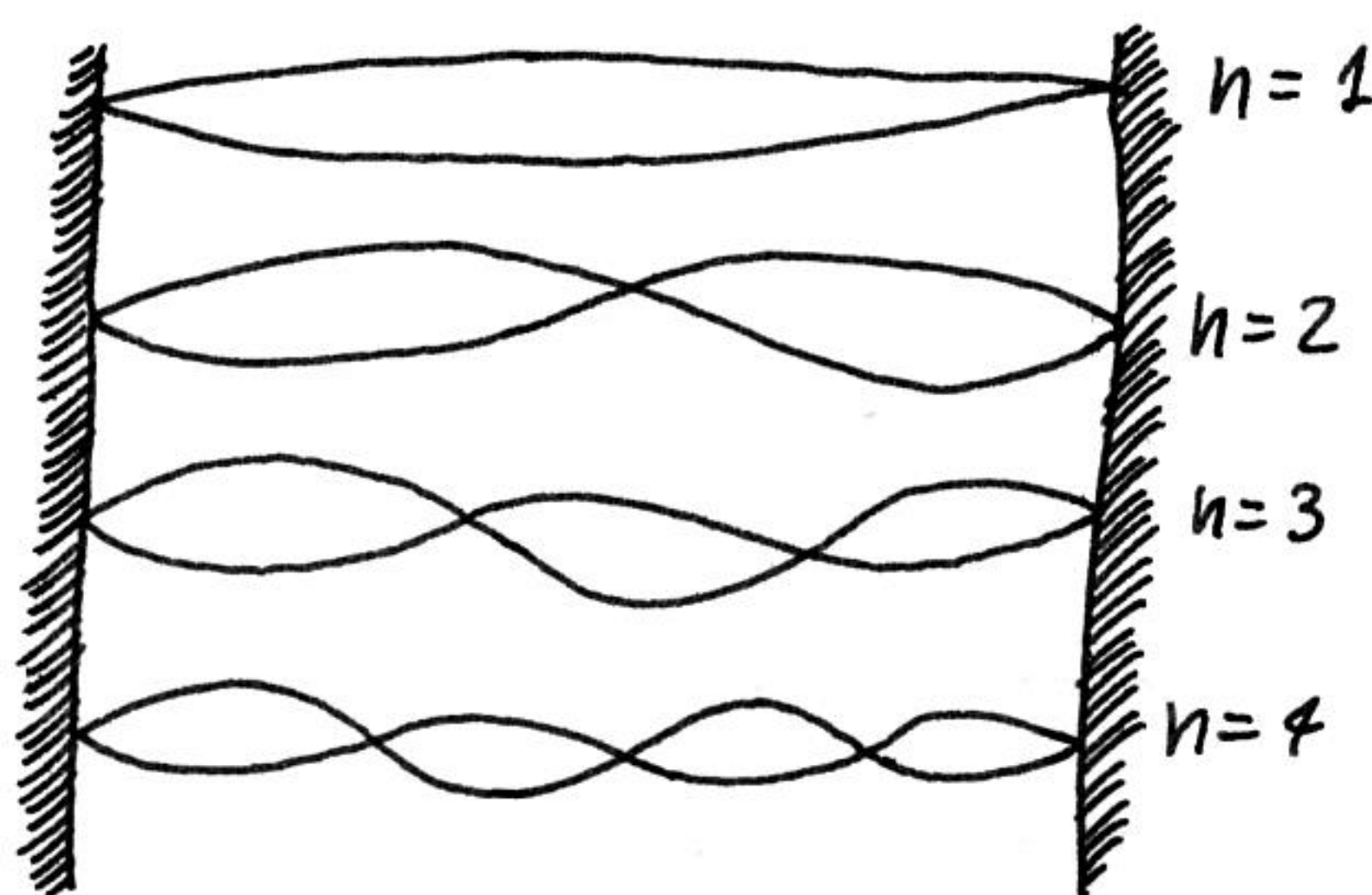
~~conservazione dell'energia~~

SORGENTI SONORE

Pizzicando una corda fissa agli estremi, si creano delle vibrazioni trasversali che si propagano lungo la corda e che, riflettendosi agli estremi, danno origine a delle onde stazionarie che, a loro volta, stabiliscono delle onde sonore longitudinali nell'aria circostante, che colpendo il nostro orecchio ci daranno la sensazione del suono.

Abbiamo visto che una corda di lunghezza l , fissa agli estremi, può vibrare con frequenze $\nu = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ con $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ (ricordiamoci che $\sqrt{\frac{F}{\mu}} = v$)

n è il numero di semionde presenti nella corda.



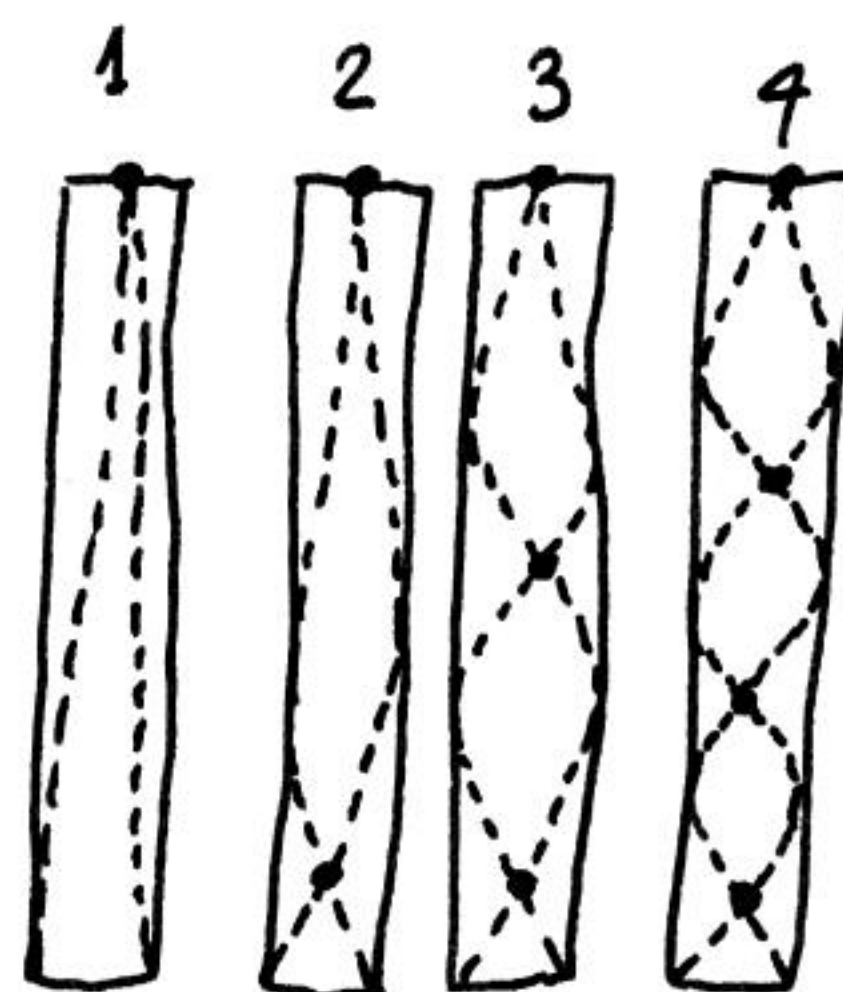
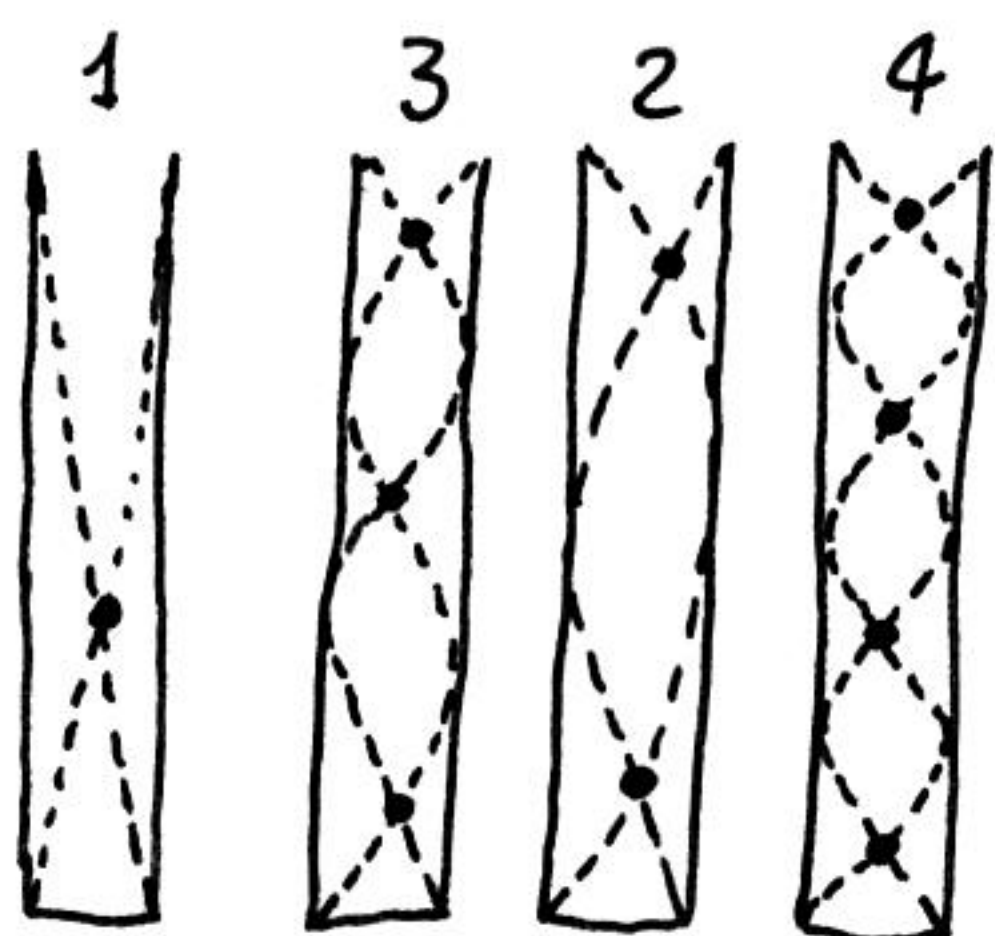
Per $n=1$ si ha la frequenza più bassa, $\frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, detta FREQUENZA FONDAMENTALE.
Le altre frequenze sono le ARMONICHE SUPERIORI.

Tutte queste frequenze formano la SERIE ARMONICA.

La qualità del suono (il timbro) di un particolare strumento musicale dipende dal numero delle armoniche superiori presenti e dalle loro intensità relative, quando si eccita lo strumento suonando una nota (il LA e, ad es., a 440 Hz)

Suono in una canna d'organo (dato dalla colonna d'aria vibrante)

NODI:



la sorgente è
in basso

CANNA:

canna aperta

canna chiusa

FREQUENZA
FONDAMENTALE: $\frac{1}{2l} V$ $\frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$

$\frac{1}{4l} V$ $\frac{1}{4l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$

(solo le armoniche dispari)

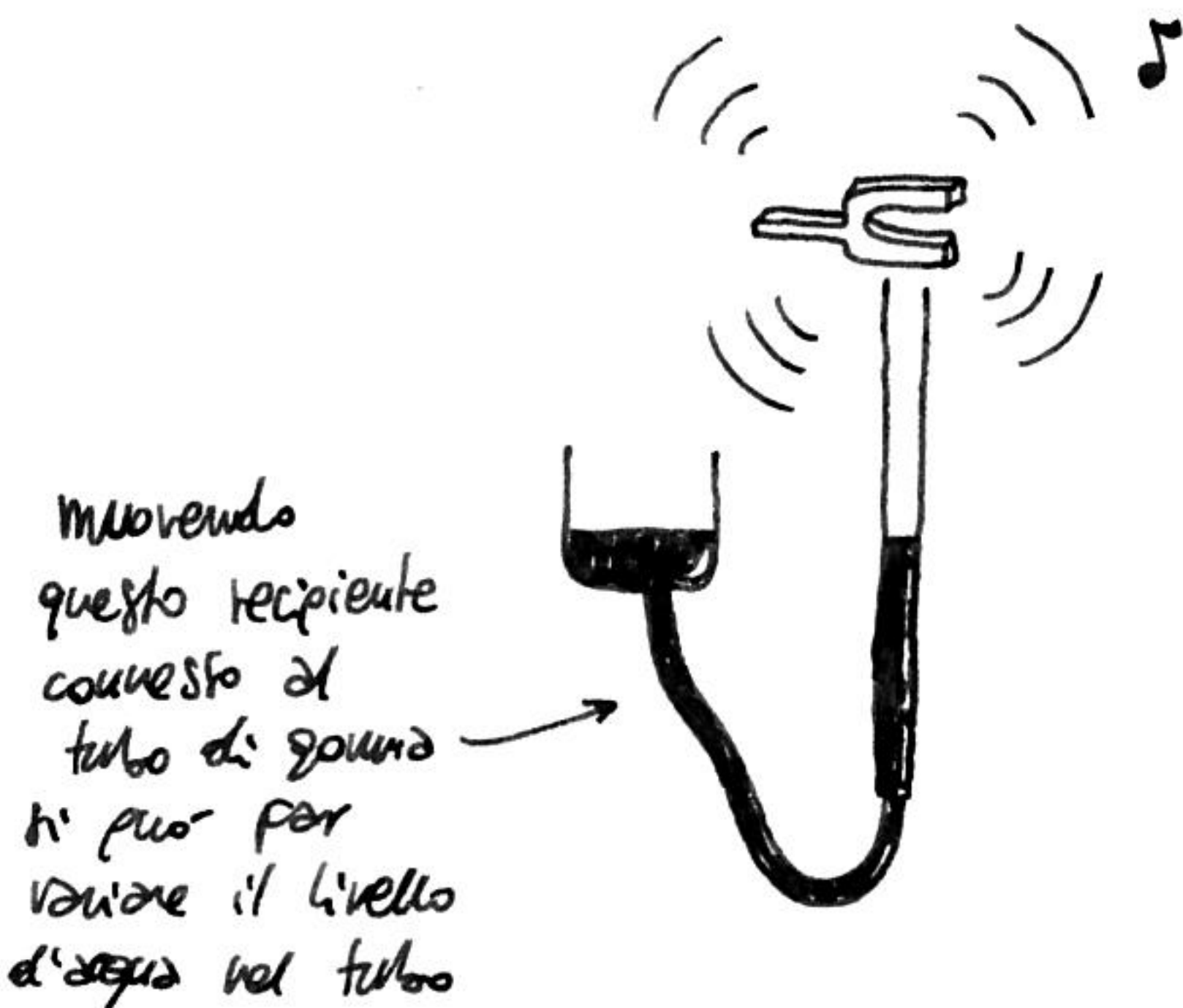
Anche la membrana di un tamburo può vibrare: in questo caso, i bordi della membrana sono ovunque una linea nodale.

Le frequenze di una membrana vibrante non sono armoniche, cioè non sono multipli interi della frequenza fondamentale; perciò un tamburo non fa proprio "musica".

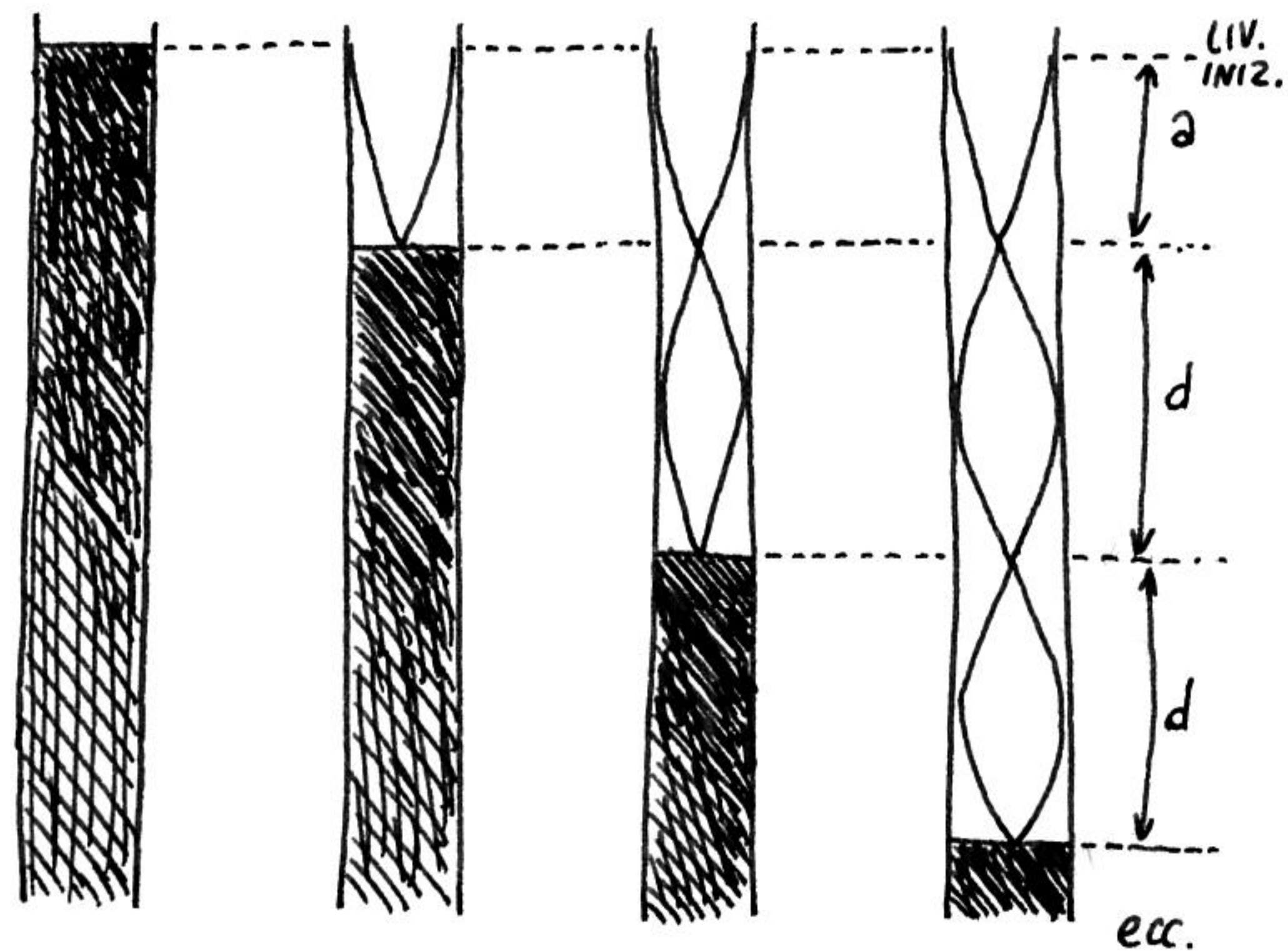
Tutti i corpi elastici vibrano liberamente con un insieme di frequenze proprie che in genere non sono armoniche; si hanno però sempre delle onde stazionarie e quindi nodi e ventri.

Apparecchio per misurare la velocità del suono nell'aria.

Un diapason che ha frequenza propria di vibrazione γ viene posto all'imboccatura di un tubo riempito parzialmente di acqua, e il cui livello d'acqua si può far variare facilmente. Il diapason mette in vibrazione la colonna d'aria che sta fra l'imboccatura del tubo e il livello dell'acqua. Abbassando costantemente il livello dell'acqua, si vede che l'intensità del suono del diapason raggiunge un massimo quando si abbassa l'acqua di un tratto a , e poi anche quando la si abbassa ulteriormente di un tratto d , $2d$, $3d$, $4d$, ecc.



onde sonore emesse dal diapason



L'intensità sonora è massima quando la colonna d'aria è in risonanza col diapason, cioè quando vibra con la sua stessa frequenza.

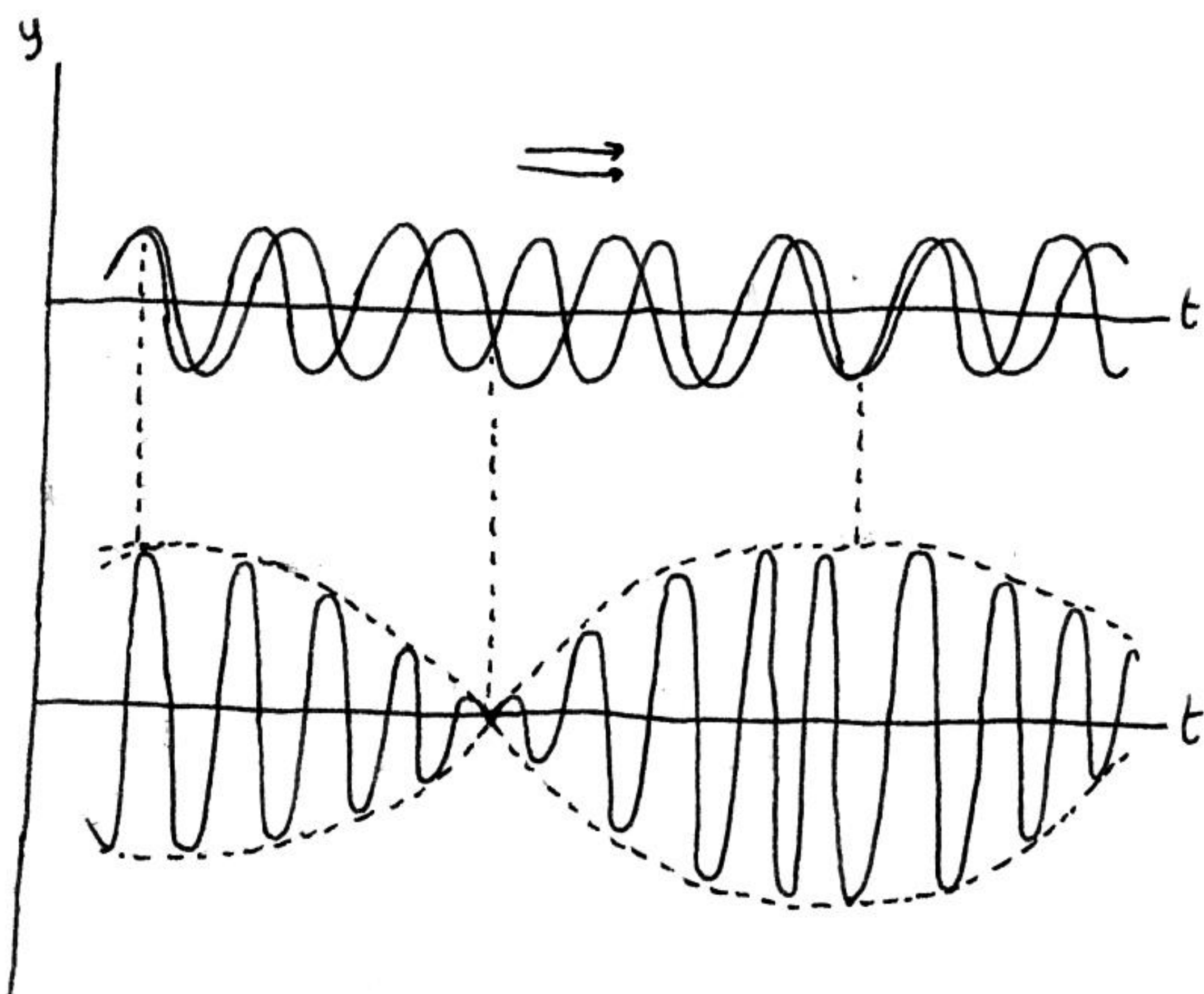
Sappiamo per definizione che $\lambda = \frac{v}{\gamma}$

e vediamo ora anche che $\lambda = 2d$

perciò si ottiene $v = 2d\gamma$, che ci permette di misurare la velocità del suono nell'aria conoscendo la frequenza del diapason e misurando d .

Abbiamo visto precedentemente che quando due treni d'onda di uguale frequenza si propagano uno contro l'altro, si formano onde stazionarie (interferenza nello spazio).

Ora, se due treni d'onda ~~con frequenze~~ di frequenze leggermente diverse si propagano nella stessa direzione, si genera il fenomeno dei BATTIMENTI (interferenza nel tempo) - Questo accade ad es. quando si premono contemporaneamente due tasti contigui del pianoforte.



due treni d'onda
di frequenza simile
nella stessa direzione...
(non è necessario che
abbiano ampiezze uguali)

... la loro somma

Come si vede dalla figura, si generano variazioni di intensità sonora, note come "battimenti".

L'equazione dell'ampiezza di una delle due onde è, come sappiamo, $y = y_m \cos kx = y_m \cos kvt = y_m \cos \frac{2\pi}{\lambda} vt = y_m \cos \frac{2\pi}{v/\nu} vt = y_m \cos 2\pi \nu t$.

Lo spostamento prodotto dalla prima onda è perciò $y_1 = y_m \cos 2\pi \nu_1 t$ e quello della seconda onda è $y_2 = y_m \cos 2\pi \nu_2 t$.

Lo spostamento totale è perciò $y = y_1 + y_2 = y_m (\cos 2\pi \nu_1 t + \cos 2\pi \nu_2 t) = 2y_m \cos(2\pi t \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}) \cos(2\pi t \frac{\nu_1 + \nu_2}{2})$

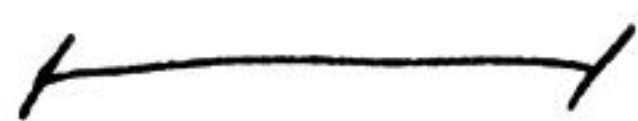
$[\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}]$

ampiezza
e
frequenza della vibrazione risultante

Come si vede, quando ν_1 tende ad essere uguale a ν_2 , l'ampiezza tende a diventare costante nel tempo. $\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}$ è la frequenza dell'ampiezza, ν_{amp} .

Un battimento, cioè un massimo di intensità sonora, si ottiene quando $\cos\left(2\pi t \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right) = \pm 1$. Tali valori si verificano una volta in ciascun ciclo, perciò il numero di battimenti per secondo è $2\nu_{\text{sup}}$ ossia $2 \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}$ ossia $\nu_1 - \nu_2$.

Max numero di battimenti/secondo che l'orecchio umano può distinguere: 7 battimenti/secondo



EFFETTO DOPPLER

L'effetto Doppler è quell'effetto per il quale un ascoltatore che si avvicina a una sorgente sonora ferma (o un ascoltatore fermo a cui si avvicina una sorgente sonora) ode un suono di frequenza maggiore del suono emesso dalla sorgente, (cioè più acuto); se l'ascoltatore si allontana dalla sorgente ode un suono di frequenza minore (cioè più grave).

[ν, λ e v si riferiscono all'onda sonora emessa dalla sorgente]

Consideriamo la sorgente ferma e l'ascoltatore che si muove verso di essa con velocità v_0 .

Egli, se fosse fermo, riceverebbe in un tempo t un numero $\frac{vt}{\lambda}$ di onde, uguale al numero di onde emesso dalla sorgente; invece ne riceve $\frac{v_0 t}{\lambda}$ in più. La frequenza è il numero di onde ~~emesso dalla sorgente~~ ricevute per unità di tempo; perciò la frequenza del suono sentito dall'ascoltatore è ν' pari a

$$\frac{\frac{vt}{\lambda} + \frac{v_0 t}{\lambda}}{t} \quad \text{cioè} \quad \frac{v + v_0}{\lambda} \quad \text{cioè} \quad \frac{v + v_0}{v/\nu} \quad \text{cioè} \quad \boxed{\nu' = \nu \left(\frac{v + v_0}{v} \right)}$$

Se l'ascoltatore si allontana dalla sorgente con velocità v_0 , ode un suono di frequenza $\nu' = \nu \left(\frac{v - v_0}{v} \right)$.

La relazione generale per la frequenza del suono udito dall'ascoltatore che si muova con velocità v_0 rispetto alla sorgente (positiva se si avvicina o negativa se si allontana) è quindi

$$\nu' = \nu \left(\frac{v \pm v_0}{v} \right)$$

Consideriamo ~~l'ascoltatore~~ l'ascoltatore fermo e la sorgente che si avvicina a lui con velocità v_s .

Ad ogni vibrazione completa, la sorgente si avvicina di un tratto $\frac{v_s}{v}$, e ciascuna lunghezza d'onda di ciascuna onda emessa è accorciata di tale valore. Perciò la lunghezza d'onda del suono che arriva all'ascoltatore è $\frac{v}{v} - \frac{v_s}{v}$. La frequenza del suono udito dall'ascoltatore è perciò

$$v' = \frac{v}{\frac{v}{v} - \frac{v_s}{v}} = \frac{vv}{v - v_s} = v \left(\frac{v}{v - v_s} \right) \quad \text{quindi} \quad \boxed{v' = v \left(\frac{v}{v - v_s} \right)}$$

Mentre se la sorgente si allontana la frequenza del suono udito è $v' = v \left(\frac{v}{v + v_s} \right)$.

La relazione generale è quindi $v' = v \left(\frac{v}{v \pm v_s} \right)$, dove il segno negativo vale quando la sorgente si avvicina e il segno positivo quando si allontana.

Se entrambi, sorgente e ascoltatore, si muovono rispetto al mezzo che trasmette l'onda sonora, la frequenza del suono percepito dall'ascoltatore è

$$\boxed{v' = v \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} \right)}$$

nel caso che sorgente e ascoltatore si ^{avvicinino} _{allontanino} reciprocamente.

o a livelli atomici,

L'effetto Doppler relativo alla luce proveniente da lontani corpi celesti si manifesta come una variazione della lunghezza d'onda della luce (es. red shift).

La differenza fra effetto Doppler per il suono e per la luce è che la luce non ha bisogno di un mezzo per propagarsi e la sua velocità è sempre $c = 300.000 \text{ km/s}$ qualunque sia il moto della sorgente che la emette, mentre invece x il suono la situazione è differente a seconda che si muova sorgente o ascoltatore, perché la velocità del suono dipende dal mezzo.

Un diapason vibrante si allontana dall'ascoltatore e si muove verso un ~~muro~~ muro. Nell'ambiente ci saranno due treni d'onda diversi: quello ~~generato~~ del diapason riflesso dal muro e quello ~~del~~ diretto del diapason (che arriva all'ascoltatore, che lo ode di frequenza più bassa, dato che si allontana da lui). L'interferenza di questi due treni di frequenza diversa provoca battimenti.

21 TEMPERATURA

Per analizzare una situazione fisica, noi delimitiamo una porzione ~~data~~ di materia che poi studieremo (SISTEMA), delimitato dal resto dell'ambiente che poi avrà influenza su esso (AMBIENTE ESTERNO).

Per descrivere tale sistema utilizziamo delle...

GRANDEZZE MACROSCOPICHE

temperatura, pressione, volume, energia interna, ecc.

GRANDEZZE MICROSCOPICHE

velocità, masse, energie, momenti angolari ecc. delle particelle del sistema

che formano le basi della...

TERMODINAMICA ($\propto$ i processi relativi al calore)

MECCANICA STATISTICA

legate tra loro da
relazioni

PRINCIPIO ZERO DELLA TERMODINAMICA:

"Se due corpi A e B sono entrambi in equilibrio termico con un terzo corpo C, allora lo sono anche fra loro".

Ponendo ~~due~~ un corpo caldo A a contatto con un corpo freddo B, dopo un certo periodo di tempo essi daranno luogo alla stessa sensazione di calore (saranno in equilibrio termico).

Esiste una grandezza scalare detta temperatura, propria di tutti i sistemi termodinamici, tale che l'uguaglianza di temperatura è condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio termico.

Al variare della temperatura, ci sono molte proprietà fisiche che cambiano (l'altezza di un liquido in un capillare, il volume di un gas a pressione costante, la pressione di un gas a volume costante, il colore del filamento di una lampada, ecc.) ed è quindi possibile costruire una particolare scala di temperature basandosi sulla relazione fra la proprietà termometrica (es. ~~proprietà termometrica~~ la lunghezza della colonna di mercurio in un tubo di vetro) della sostanza termometrica (il mercurio) in questione, e la temperatura nella scala in questione; relazione che si suppone continua e monotona.

Scelta la sostanza termometrica, abbiamo la relazione

$$T(X) = a X$$

↑ temperatura del termometro
↑ proprietà della sostanza termometrica
↑ costante, da determinare

e quindi sarà anche $\frac{T(x_1)}{T(x_2)} = \frac{x_1}{x_2}$.

Per determinare la costante a , e quindi tarare il termometro, occorre individuare un punto fisso comune, al quale tutti i termometri indicano la stessa temperatura.

Per tale punto fisso è stato scelto il punto triplo dell'acqua, cioè il punto al quale acqua ghiaccio e vapor acqua coesistono in equilibrio, ottenibile alla pressione di $9,58 \text{ mm Hg} = 610 \text{ Pa}$, e per tale punto è definita una temperatura di $273,16 \text{ }^\circ\text{K}$ (Kelvin).

Si ha quindi $\frac{T(x)}{T(x_{\text{triplo}})} = \frac{x}{x_{\text{triplo}}}$ dove $T(x_{\text{triplo}}) = 273,16 \text{ }^\circ\text{K}$ e quindi

$$T(X) = 273,16 \text{ }^\circ\text{K} \frac{X}{X_{\text{triplo}}}$$

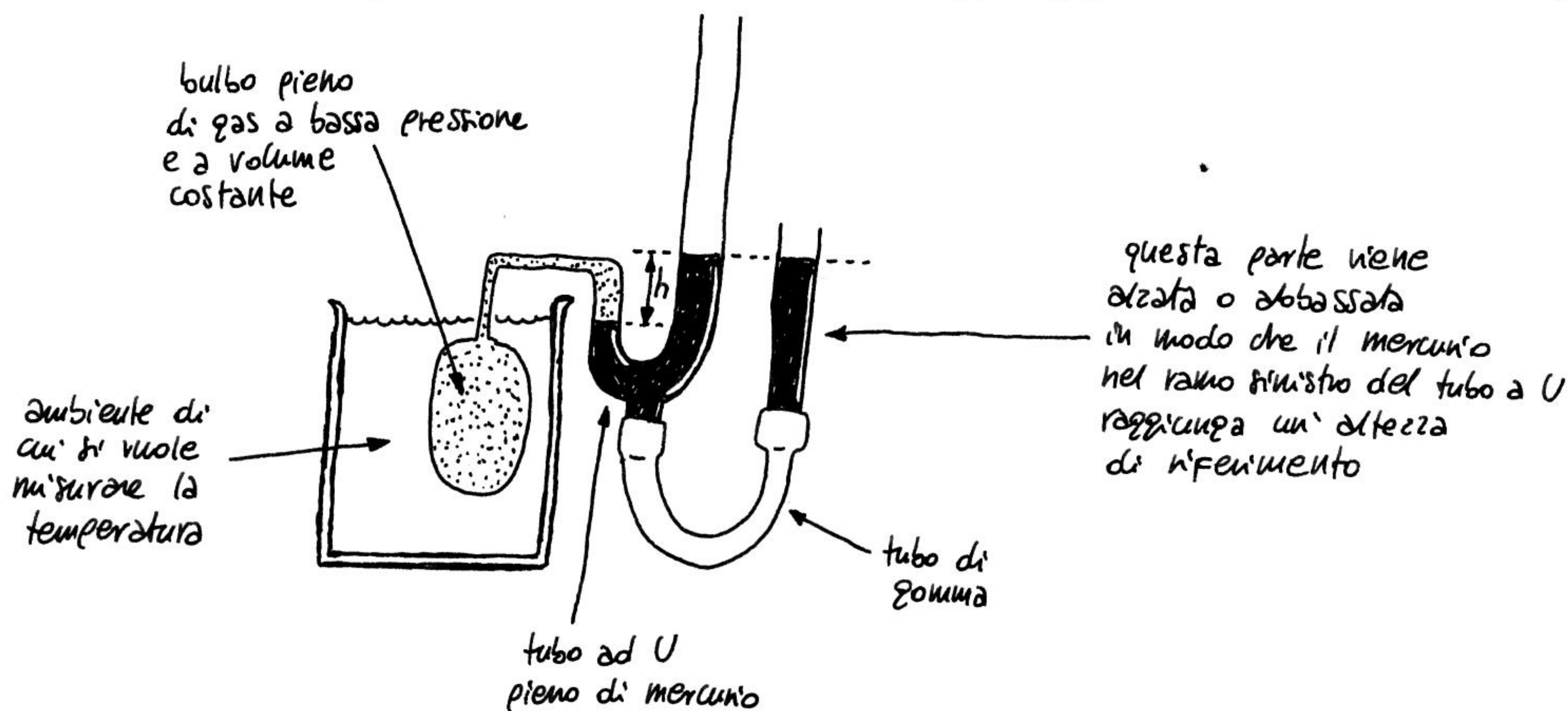
Quindi tutti i termometri al punto triplo segnano la stessa temperatura, non così però alle altre temperature. Però le letture alle altre temperature differiscono poco se si usa un termometro basato su gas a bassa pressione e volume costante.

TERMOMETRO A GAS A VOLUME COSTANTE

(in pratica e' un manometro)

E' il piu' usato nella ricerca scientifica x determinare le scale di temperatura.

La pressione di un gas mantenuto a volume costante cresce con l'aumentare della temperatura.



La pressione del gas nel bulbo e' allora $P = p_0 + \rho g h$ (p_0 = press. atmosf., ρ = densita' Hg)

e da questa si ricava la temperatura dalla relazione $T(P) = 273,16 \text{ } ^\circ\text{K} \frac{P}{P_{\text{triplo}}}$.

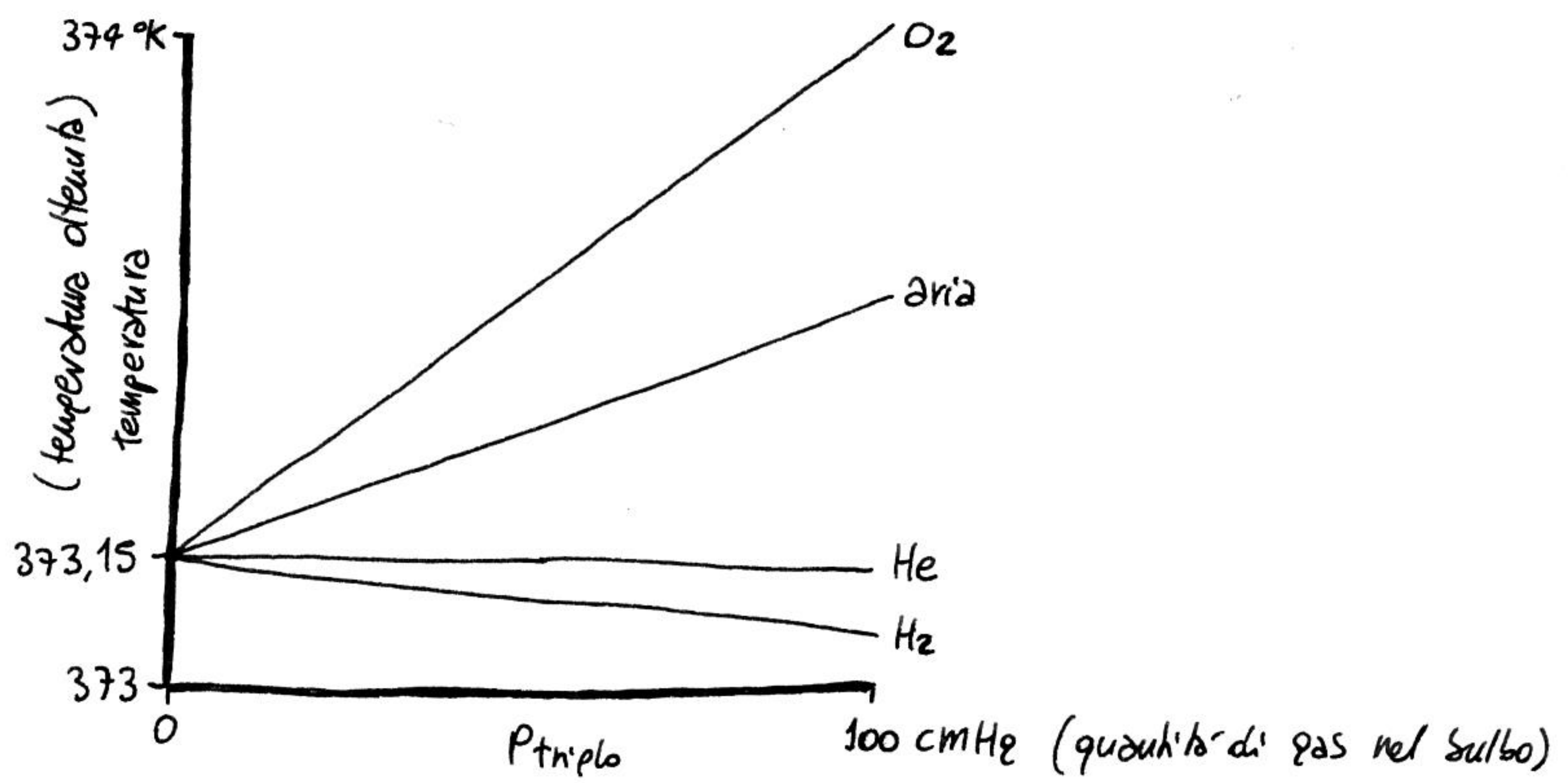
E' un apparecchio molto complesso. Errori che vanno poi corretti:

- contrazioni o dilatazioni del bulbo dovute alla temperatura dell'ambiente da esaminare
- non tutto il gas e' immerso nell'ambiente da esaminare

Utilizziamo tale termometro misurando P_{triplo} , e poi P in un ambiente di vapor acqueo in condensazione (che sara' a 100°C circa). Poi togliamo un po' di gas dal bulbo e rimmisuriamo P_{triplo} , e P nello stesso ambiente di vapor acqueo in condensazione: queste due pressioni saranno minori di prima. Ripetiamo questo piu' volte e potremo disegnare un grafico relativo al nostro gas, e quindi estrapolare il grafico per $P_{\text{triplo}} = 0$.

della temperatura in funzione di P_{triplo} ,
temperatura ~~da~~ calcolata conoscendo P e P_{triplo} dalla relazione scritta sopra.

Ripetendo tale procedimento per gas differenti vedremo che la temperatura ottenuta varia al variare della pressione; e tale scarto e' diverso per ciascun gas, ma diventa zero quando P_{triplo} ~~diventa~~ e' nullo.



Quando la pressione di riferimento è prossima allo zero, la temperatura è indipendente dal gas usato.

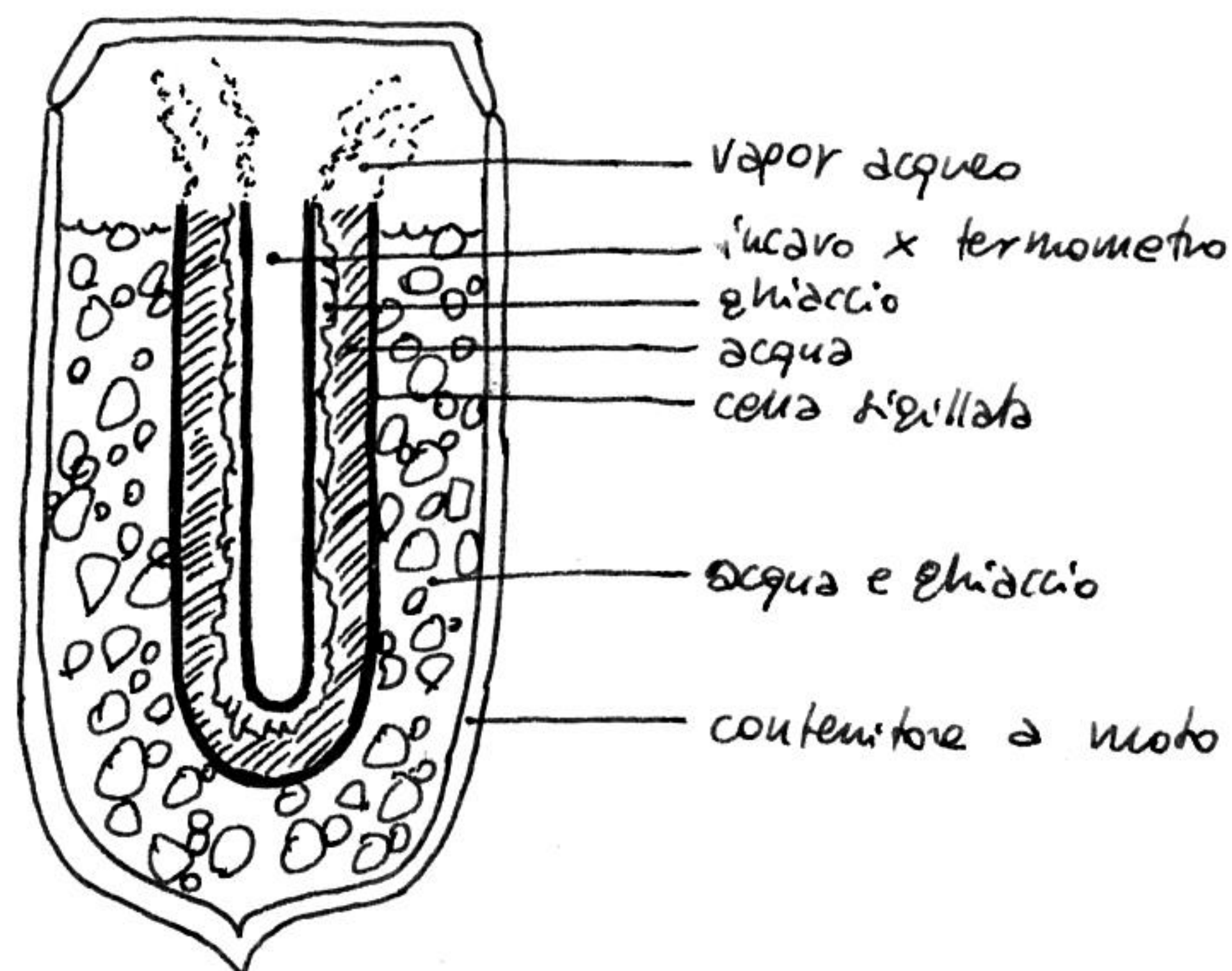
Perciò il valore estrapolato della temperatura dipende solo dalle proprietà generali del gas e non dal gas usato, ed è definita come

$$T = 273,16^\circ\text{K} \lim_{P_{tr} \rightarrow 0} \frac{P}{P_{tr}} \quad (V \text{ costante})$$

Come si vede, l'elio ha grafico quasi orizzontale, cioè dà la stessa temperatura a qualsiasi pressione, ed è quindi il migliore da utilizzare perché più si avvicina al comportamento di un gas perfetto. ^{Si liquefa} ~~Si liquefa~~ a 1°K, perciò per temperature inferiori non è possibile utilizzare il termometro a gas a pressione costante.

La scala Kelvin ha uno zero assoluto di 0°K (minima temperatura possibile). A tale temperatura l'energia cinetica delle molecole è minima (ma non nulla).

CELLA A PUNTO TRIPLO



SCALA

	KELVIN °K	CELSIUS °C	FAHRENHEIT °F
punto evaporazione acqua	373,15	100	212
punto triplo acqua	273,16	0,01	32,02
zero assoluto	0	-273,15	-459,67

$$T_c = T_k - 273,15$$

$$T_F = 32 + \frac{9}{5} T_c$$

punto di evaporazione = temperatura alla quale vapore e acqua liquida sono in equilibrio a pressione atmosferica (100 °C)

punto di fusione = temperatura alla quale ghiaccio e acqua satura d'aria sono in equilibrio a pressione atmosferica (0 °C)

E' stata creata una Scala Pratica Internazionale delle temperature fondata su determinati punti fissi (punto triplo, di ebollizione e di solidificazione) di determinate sostanze (idrogeno, ossigeno, acqua, zinco, oro).

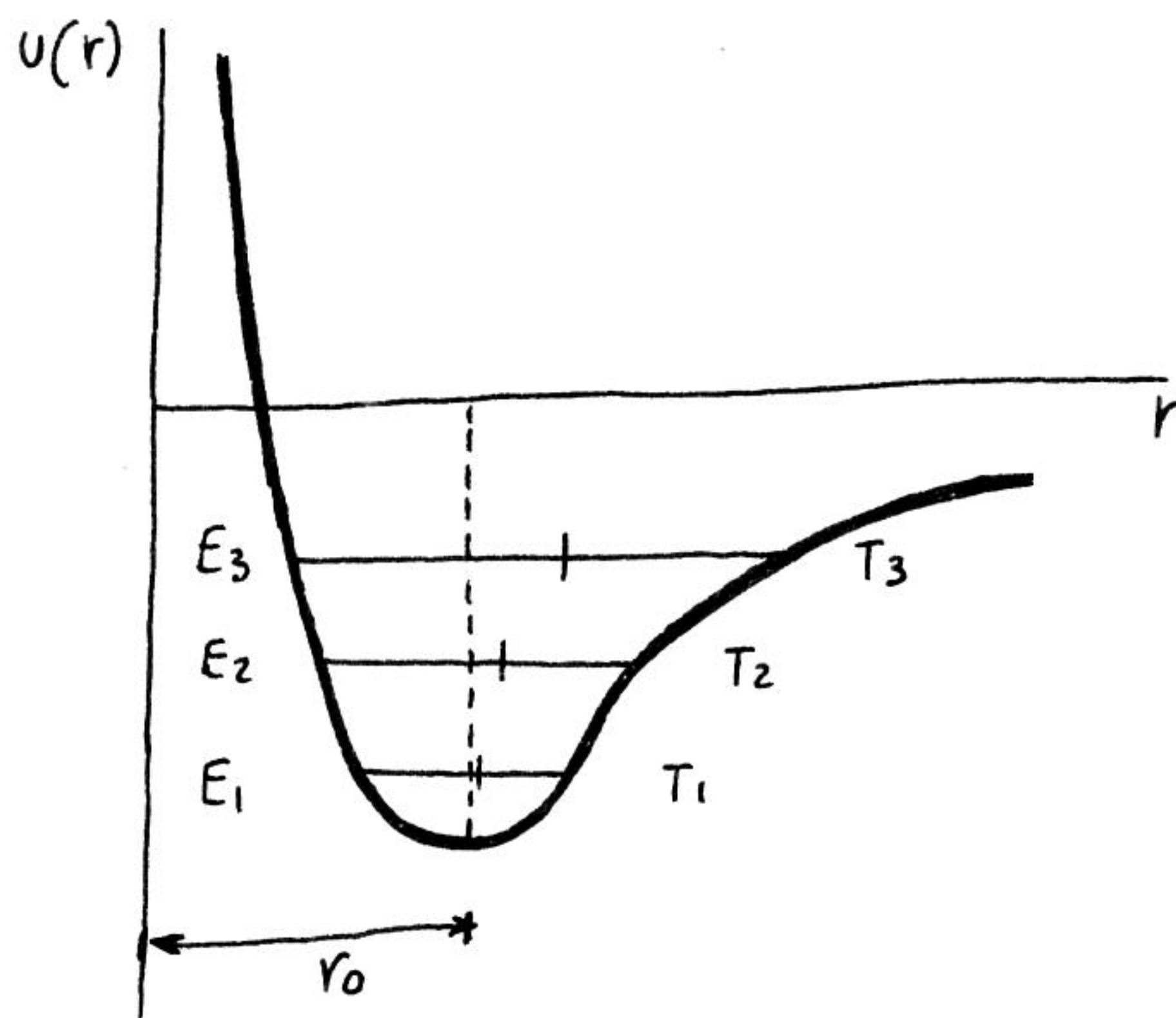
DILATAZIONE TERMICA

Gli atomi di un corpo sono disposti regolarmente in un reticolo ed in' mantenuti da forze reciproche elettriche; essi sono in vibrazione (di ampiezza 10^{-12} m e frequenza 10^{13} Hz). Aumentando la temperatura, aumenta la loro distanza media e il corpo si dilata in ognuna delle sue dimensioni lunghezza, larghezza e profondità (dilatazione lineare).

Sia ΔT = variazione temperatura, l = una delle dimensioni lineari del corpo; si ha variazione di quella dimensione lineare del corpo $\Delta l = \alpha l \Delta T$ (per ΔT piccola)

dove α = COEFFICIENTE DI DILATAZIONE LINEARE (proprio x ciascun corpo)

possiamo supporre che sia costante con la temperatura, anche se a rigore dipende dalla temperatura ~~iniziale~~ di dilatazione e dalla temperatura alla quale abbiamo misurato l



La curva che esprime l'energia potenziale di due atomi contigui in un corpo in funzione della loro distanza, ~~è~~ è asimmetrica; quando questi due atomi si avvicinano dalla loro distanza di equilibrio r_0 entrano in gioco forti forze repulsive, quando si allontanano vengono a determinarsi forze attrattive più deboli, e la curva dell'energia potenziale cresce più lentamente.

Augmentando la temperatura T del corpo, l'energia vibrazionale E degli atomi aumenta, ~~•~~ a causa dell'asimmetria della curva aumenta anche la distanza media ^(ampiezza di vibrazione) interatomica di vibrazione (segnata in figura), e quindi ~~il~~ il corpo si dilata.

Se la curva ~~era~~ fosse simmetrica, a qualsiasi temperatura la distanza media sarebbe uguale alla distanza di equilibrio r_0 , e il corpo non si dilaterrebbe.

Alcuni solidi si contraggono all'aumentare della temperatura; la causa è un modo trasversale di vibrazione degli atomi, che è preponderante ~~per~~ sul modo solito longitudinale di vibrazione.

Molti solidi (detti isotropi) si dilatano in egual misura in tutte e tre le dimensioni lineari, in modo che si ingrandiscono in proporzione.

Aumento di volume con la temperatura: gas = molto grande

liquidi = 10 volte maggiore che dei solidi

I fluidi non hanno forma definita, perciò si parla solo di aumento di volume.

$$\Delta V = \beta V \Delta T$$

Coefficiente di dilatazione di un liquido β ~~per~~ ~~per~~ ~~per~~

(indipendente quasi dalla temperatura)

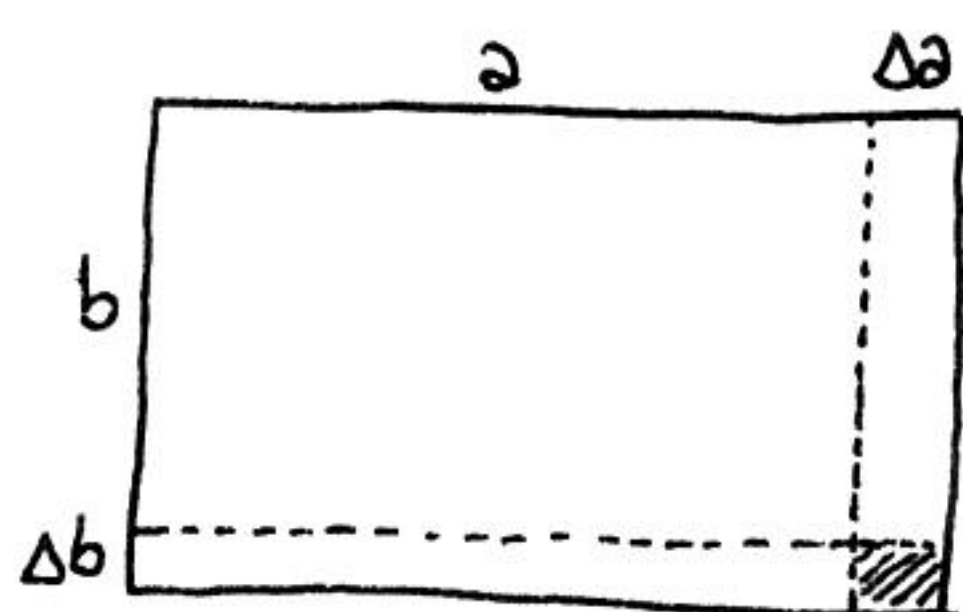
Salendo da 0°C a 4°C l'acqua si contrae, a 4°C ha il massimo di densità (1 kg/dm^3), e aumentando ancora da 4°C a 100°C ~~si~~ si dilata (la contrazione iniziale è molto piccola rispetto alla successiva dilatazione).

la formula della dilatazione lineare e- $\Delta l = \alpha l \Delta T$

Nel caso di un corpo bi-dimensionale, ~~rettangolare~~ l'aumento di superficie del corpo (trascurando l'areola $\Delta a \Delta b$) e-

$$\Delta A = a \Delta b + \Delta a b = a \alpha b \Delta T + \alpha a \Delta T b = 2 \alpha a b \Delta T = 2 \alpha A \Delta T$$

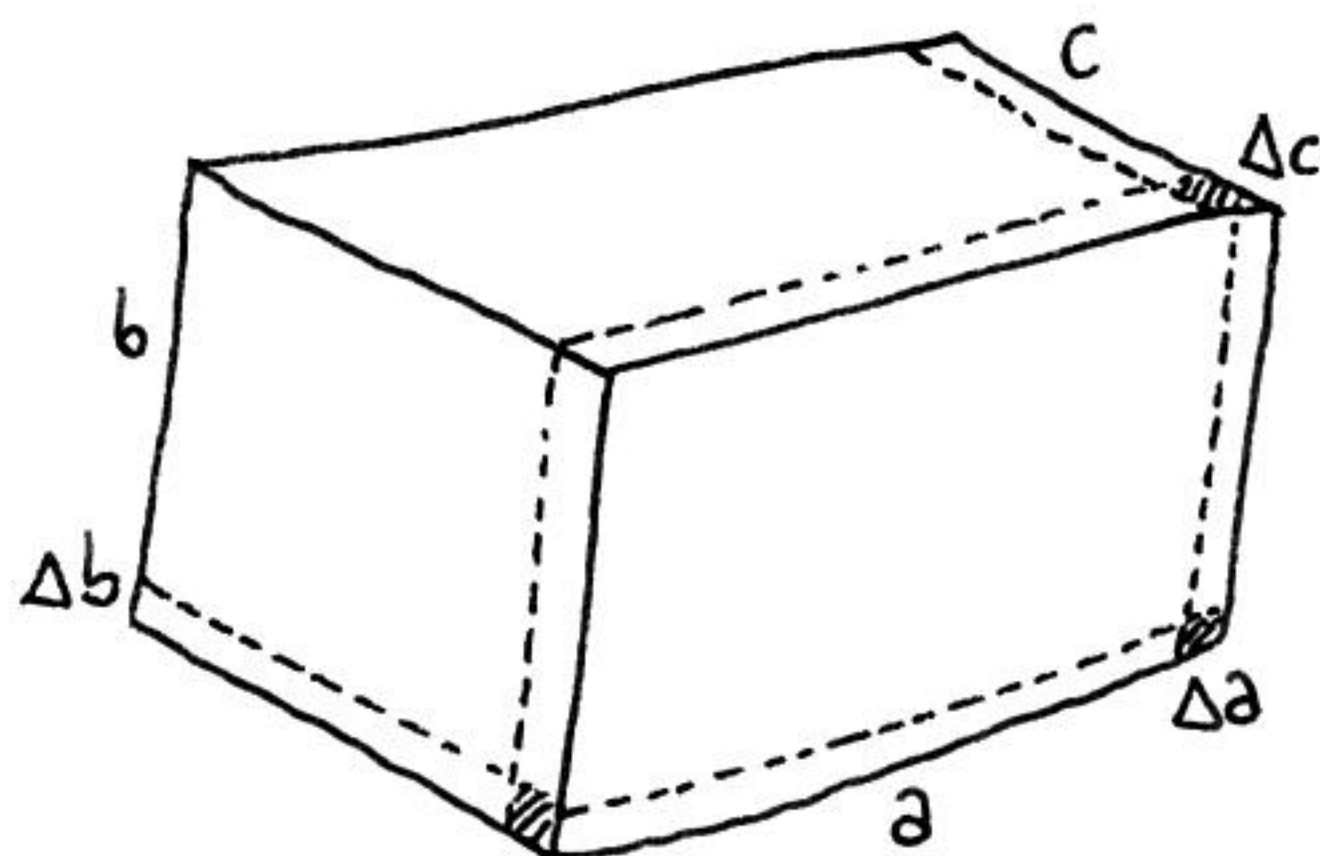
perciò $\Delta A = 2 \alpha A \Delta T$



Nel caso di un corpo tri-dimensionale, l'aumento di volume del corpo (trascurando i volumi ai vertici) e-

$$\Delta V = a b \Delta c + a \Delta b c + \Delta a b c = a b \alpha c \Delta T + a \alpha b \Delta T c + \alpha a \Delta T b c = 3 \alpha a b c \Delta T = 3 \alpha V \Delta T$$

perciò $\Delta V = 3 \alpha V \Delta T$



22 IL CALORE

Possiamo dire che il calore è ciò che viene trasferito tra due corpi esclusivamente in qualità della loro differenza di temperatura.

La chilocaloria (kcal) è la quantità di calore fornita a un kg di acqua per innalzare la sua temperatura da $14,5^\circ\text{C}$ a $15,5^\circ\text{C}$.

(Nota: è pari alla "caloria" alimentare)

1 kcal (chilocaloria) = 1000 cal (calorie) = 3,968 Btu (British thermal unit)

$$\frac{\Delta Q}{\Delta T} = C$$

CAPACITÀ TERMICA di un corpo

$$\frac{\Delta Q}{m \Delta T} = c$$

CALORE SPECIFICO di una sostanza
(= capacità termica per unità di massa)

ΔQ = quantità di calore fornita al corpo

ΔT = conseguente innalzamento della sua temperatura

Calore specifico (e quindi anche capacità termica) variano a seconda dell'intervallo di temperatura considerato, anche se approssimando possiamo considerarlo costante (varia ovviamente da sostanza a sostanza).

Possiamo definirlo, a una data temperatura T , come il limite per $\Delta T \rightarrow 0$.

Il calore che occorre fornire a un corpo di massa m e calore specifico c per aumentare la sua temperatura da T_i a T_f è (supposto $T_f - T_i \gg \Delta T$)

$$Q = \sum_{T_i}^{T_f} mc \Delta T \quad \text{e differenziando}$$

$$Q = \int_{T_i}^{T_f} mc \, dT \quad (\text{la variabile è } c)$$

calore specifico ~~approssimativo~~ dell'acqua = $1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$

(grande rispetto alle altre sostanze)

Un blocco di rame di 75 g viene tolto da una fornace e messo in un contenitore di vetro di 300 g contenente 200 g di acqua. La temperatura dell'acqua aumenta da 12°C a 27°C. Qual era la temperatura della fornace?

$$m_R C_R (T_R - T_e) = (m_V C_V + m_A C_A)(T_e - T_A)$$

↑
calore perso dal rame

↑
calore acquistato da acqua e vetro

m_R = massa rame = 75 g

m_V = " vetro = 300 g

m_A = " acqua = 200 g

C_R = calore specifico rame = 0,092 cal/g°C

C_V = " vetro = 0,12 cal/g°C

C_A = " acqua = 1 cal/g°C

T_R = temperatura iniziale rame = ?

T_A = " iniziale acqua = 12°C

T_e = " finale di equilibrio = 27°C

Sostituendo tali valori e svolgendo i calcoli, si ottiene $T_R = 540$ °C.

Si chiama CONDUZIONE DEL CALORE il trasferimento di energia tra parti adiacenti di un corpo, in virtù della loro differenza di temperatura.

Consideriamo una lastra di materiale di area A e spessore Δx le cui facce siano a differenza di temperatura ΔT , e misuriamo la quantità di calore ΔQ che fluisce perpendicolarmente alle facce in un tempo Δt .

Si ha $\frac{\Delta Q}{\Delta t} \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x}$ per ΔT e Δx piccoli.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = H = -k A \frac{dT}{dx}$$

FLUSSO TERMICO

(rapidità con la quale il calore viene trasferito attraverso l'area A)

COSTANTE DI CONDUCEBILITÀ TERMICA

questo segno meno è dovuto al fatto che il calore fluisce nella direzione in cui diminuisce la temperatura

lastra di spessore infinitesimo dx e area A , con differenza di temperatura dT tra le facce

GRADIENTE DI TEMPERATURA

K grande: buon conduttore di calore

K piccolo: buon isolante termico

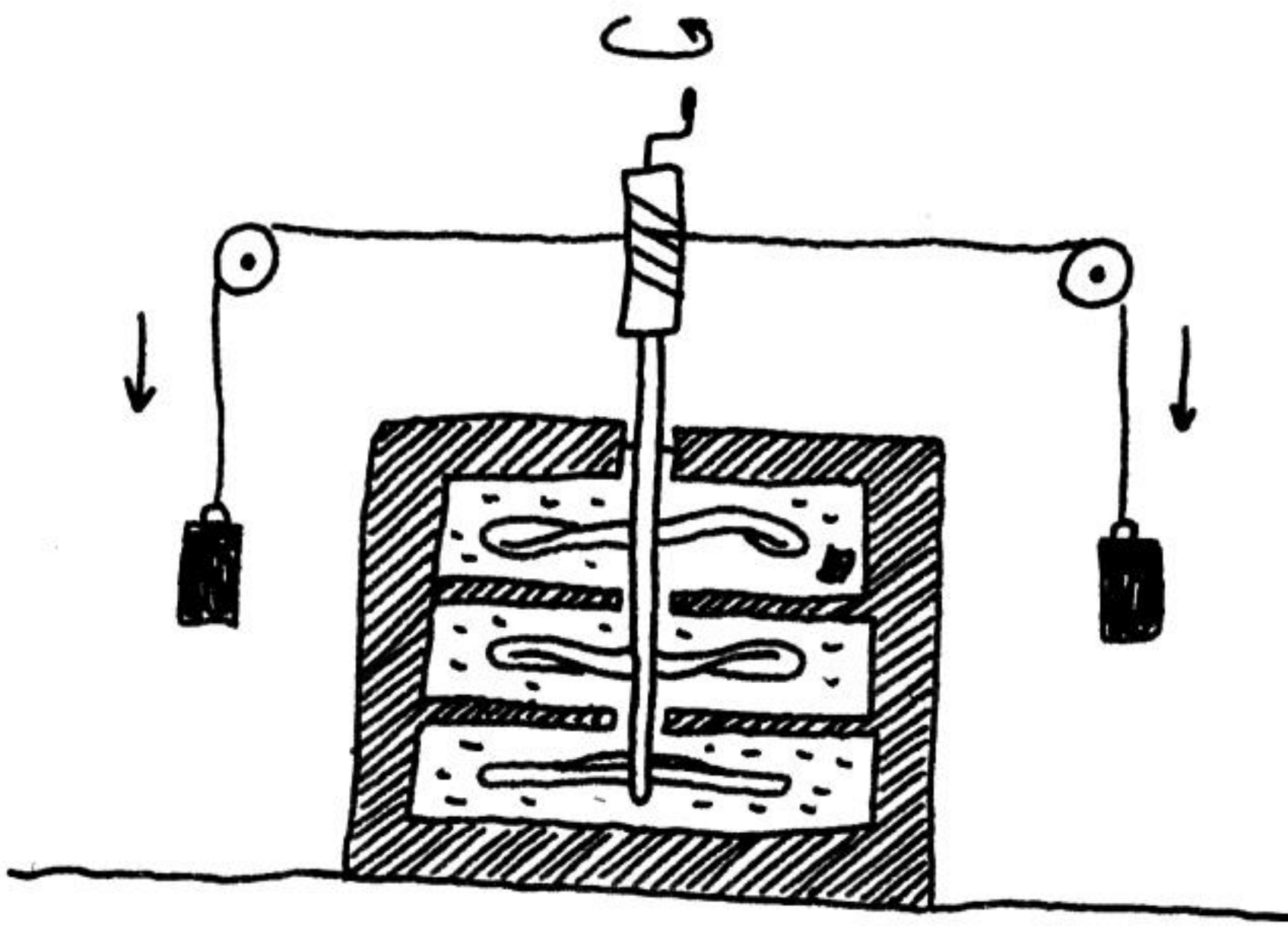
K cresce col crescere della temperatura

$K_{\text{metalli}} > K_{\text{non metalli}}$

K_{gas} è molto piccolo

(1850)

Apparato costruito da Joule per la determinazione dell' EQUIVALENTE MECCANICO DEL CALORE



Due pesi di massa totale M , cadendo da un' altezza h , mettono in rotazione una manovella che fa muovere le palette immerse nel contenitore pieno d'acqua, e quindi quest' ultima si riscalda.

La massa dell' acqua è m e il suo calore specifico è c ; essa aumenta di temperatura di una quantità ΔT .

La quantità di calore da fornire a ottenere lo stesso aumento di temperatura sarebbe stata $Q = mc \Delta T$. I pesi hanno compiuto un lavoro $L = Mgh$.

Eguagliando le equazioni e misurando i valori necessari, ~~misurando~~ Joule determinò la relazione fra le due forme di energia: lavoro e calore. Ottenne che

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$$

Che occorre compiere $4,186 \text{ J}$ di lavoro per riscaldare 1 g d'acqua da $14,5^\circ \text{C}$ a $15,5^\circ \text{C}$

~

Noi definiamo il lavoro come forma di energia trasmessa da un sistema a un altro senza che entrino in gioco una differenza di temperatura. Quando si verificano differenze di temperatura, si parla di calore.

La TERMODINAMICA studia queste interazioni di ~~energia~~ lavoro e calore.

Tre fasi di un sistema termodinamico:



I°) Stato iniziale
(in equilibrio)



II°) interazioni con
l'esterno
(l'energia entra/
esce dal sistema
sotto forma di
calore e/o lavoro)

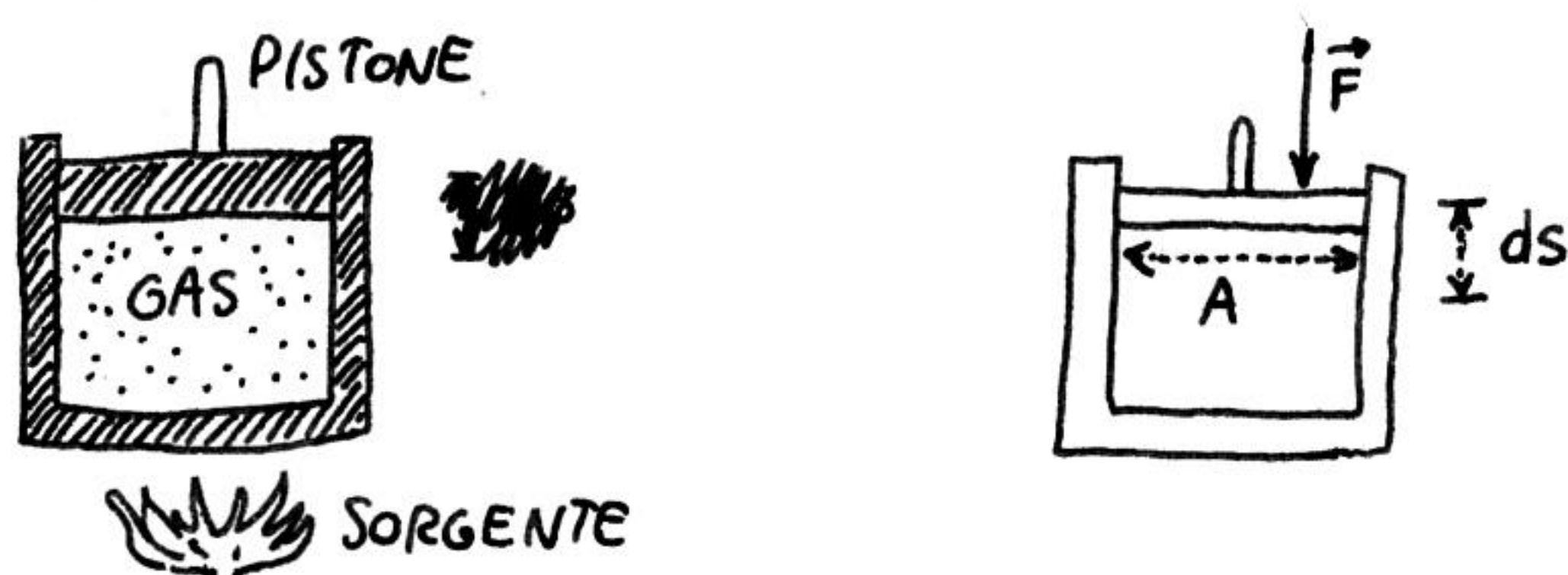


III°) Stato finale
(in equilibrio)

Q ed L non sono peculiarità dello stato del sistema, ma del processo di scambio che avviene tra sistema ed esterno. E' possibile ~~mantenere~~ operare questo processo all'infinito.

Attenzione: gli scambi di calore e/o lavoro attraverso sistema ed esterno dipendono da come si è fissato il confine. A seconda delle porzioni di ambiente che abbiamo racchiuso dentro il sistema, potremo avere $Q=0$ e $L \neq 0$, o cose simili.

Consideriamo un gas in un cilindro dotato di pistone mobile, e con una sorgente di calore. Si può fornire calore mediante la sorgente, o lavoro comprimendo il pistone; oppure il sistema può fornire calore, o lavoro espandendosi.



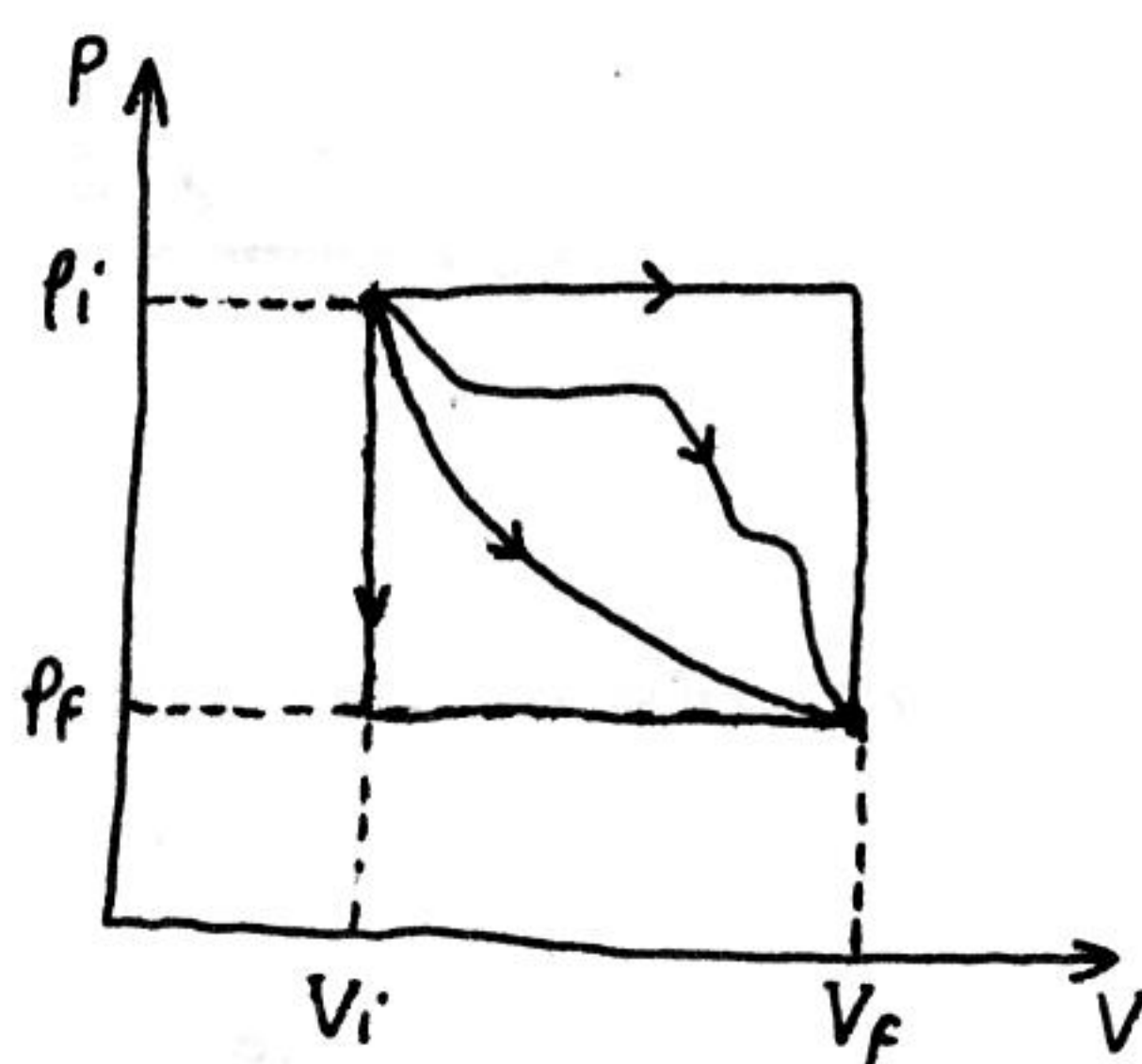
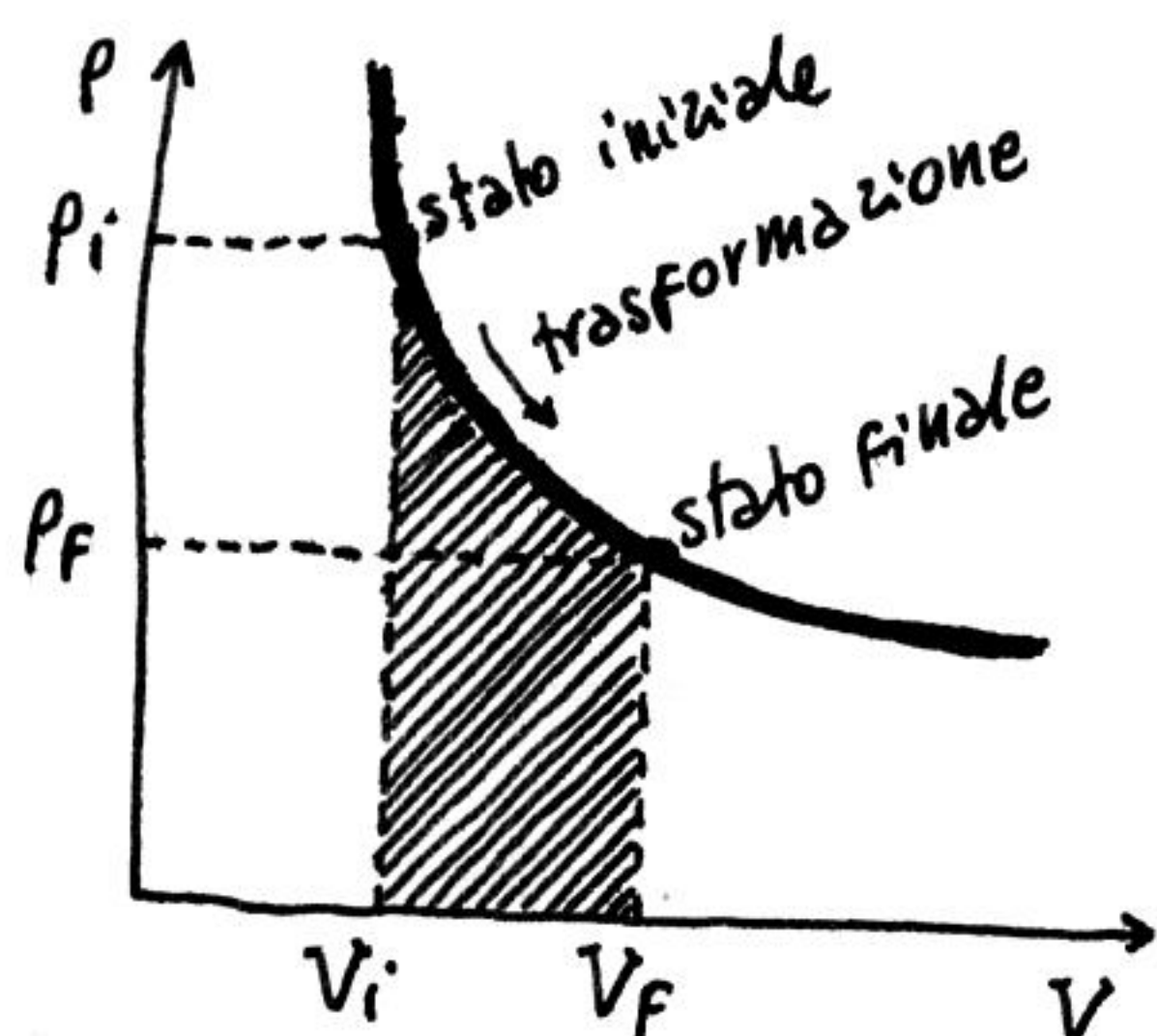
Se il gas si espande contro il pistone, il lavoro che ~~può~~ compie ~~attraversando~~ spostandolo di un tratto infinitesimo ds è - (dove p è la pressione esterna)

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = p A ds = p dV$$

La pressione varia durante il processo, perciò il lavoro compiuto si calcola integrando

$$L = \int dL = \int_{V_i}^{V_f} p dV$$

questo lavoro corrisponde all'area compresa tra V_i , V_f , la curva e l'asse V , denotata con .



A seconda del percorso compiuto, l'integrale è differente, perciò il lavoro dipende non solo dai punti iniziale e finale del processo, ma anche dal modo in cui è effettuato.

Quando un sistema termodinamico passa dallo stato i allo stato f , assorbendo una quantità Q di calore e fornendo un lavoro L , si ha che la quantità $Q-L$ dipende solo ~~dei~~ dai punti i ed f e non dal percorso compiuto; esiste una funzione U delle coordinate termodinamiche il cui valore finale U_f meno il valore iniziale U_i eguaglia la quantità $Q-L$. Tale funzione è detta ENERGIA INTERNA. Si ha quindi il

I° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

$$U_f - U_i = \Delta U = Q - L$$

Ricordate che ~~per~~ convenzionalmente si ~~pone~~ pone:

$Q > 0$ quando viene fornito al sistema

$L > 0$ quando viene ottenuto dal sistema

PROCESSO ISOBARICO (= a pressione costante)

$$L = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = p (V_2 - V_1)$$

nel caso che il volume vari da V_1 a V_2 a pressione costante



Nel cilindro è contenuta acqua, che venendo riscaldata bolle e si trasforma in vapore; il sistema si dilata spingendo in alto il pistone, ma la pressione interna è sempre la stessa perché eguaglia la pressione dovuta al peso posto sopra il pistone.

Consideriamo il cambiamento di fase dallo stato liquido allo stato di vapore a temperatura e pressione costanti.

Il lavoro fatto dalla sostanza nell'espandersi da V_L a V_V è

$$L = p (V_V - V_L)$$

Volume vapore ~~iniziale~~
(solo vapore alla fine) ~~iniziale~~

Volume del liquido
~~iniziale~~ (solo liquido all'inizio)

e il calore assorbito dalla sostanza nel processo è

$$Q = m \lambda$$

massa della
sostanza

calore di vaporizzazione
(calore necessario per far passare un'unità di
massa della sostanza da liquida a gassosa)

e quindi x questo processo si avrà $\Delta U = m\lambda - p(V_V - V_L)$.

PROCESSO ADIABATICO (niente scambio di calore tra sistema ed esterno)

Può essere ottenuto facendo avvenire il processo rapidissimamente, in modo che non ci sia il tempo perché il calore si propaghi.

Per esso è $Q = 0$ e quindi $\Delta U = -L$.

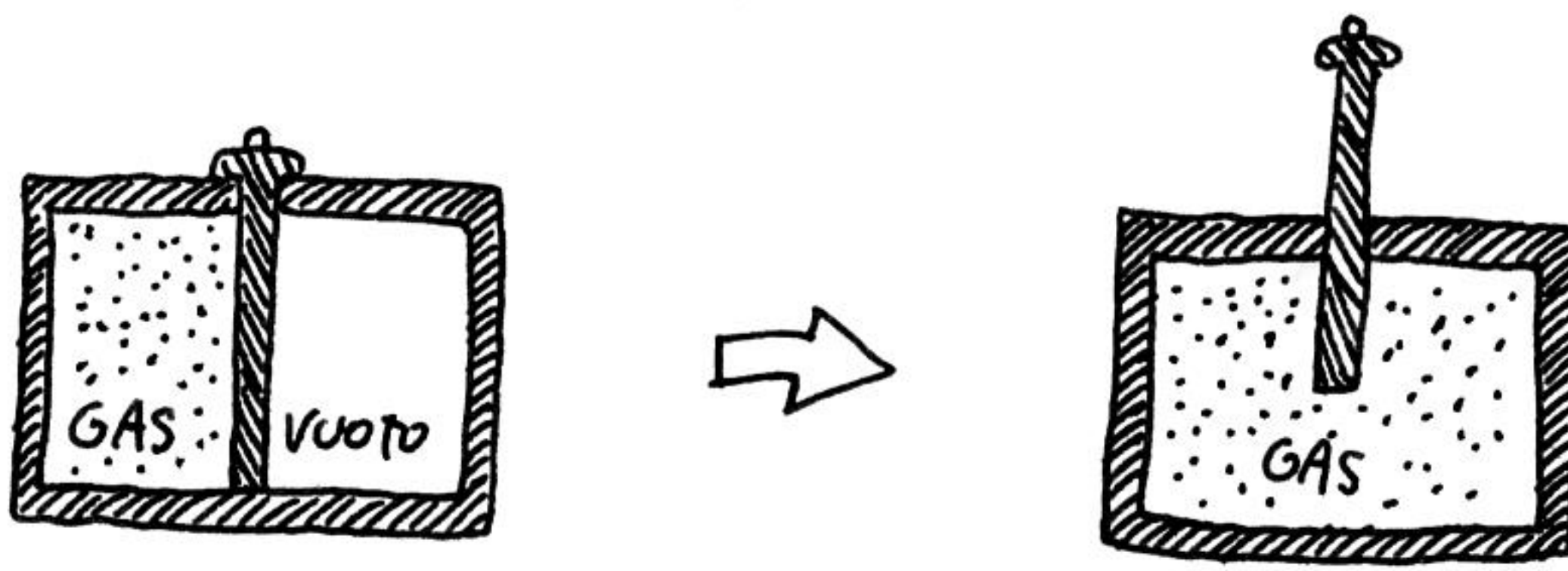
Se il lavoro è fatto dal sistema, l'energia interna del sistema diminuisce (solitamente ciò causa una diminuzione della temperatura) e di una quantità uguale a quella del lavoro compiuto.



Aggiungendo togliendo dei pesi sul pistone, sul sistema viene compiuto lavoro, il gas si comprime espande e la sua temperatura aumenta diminuisce.

ESPANSIONE LIBERA

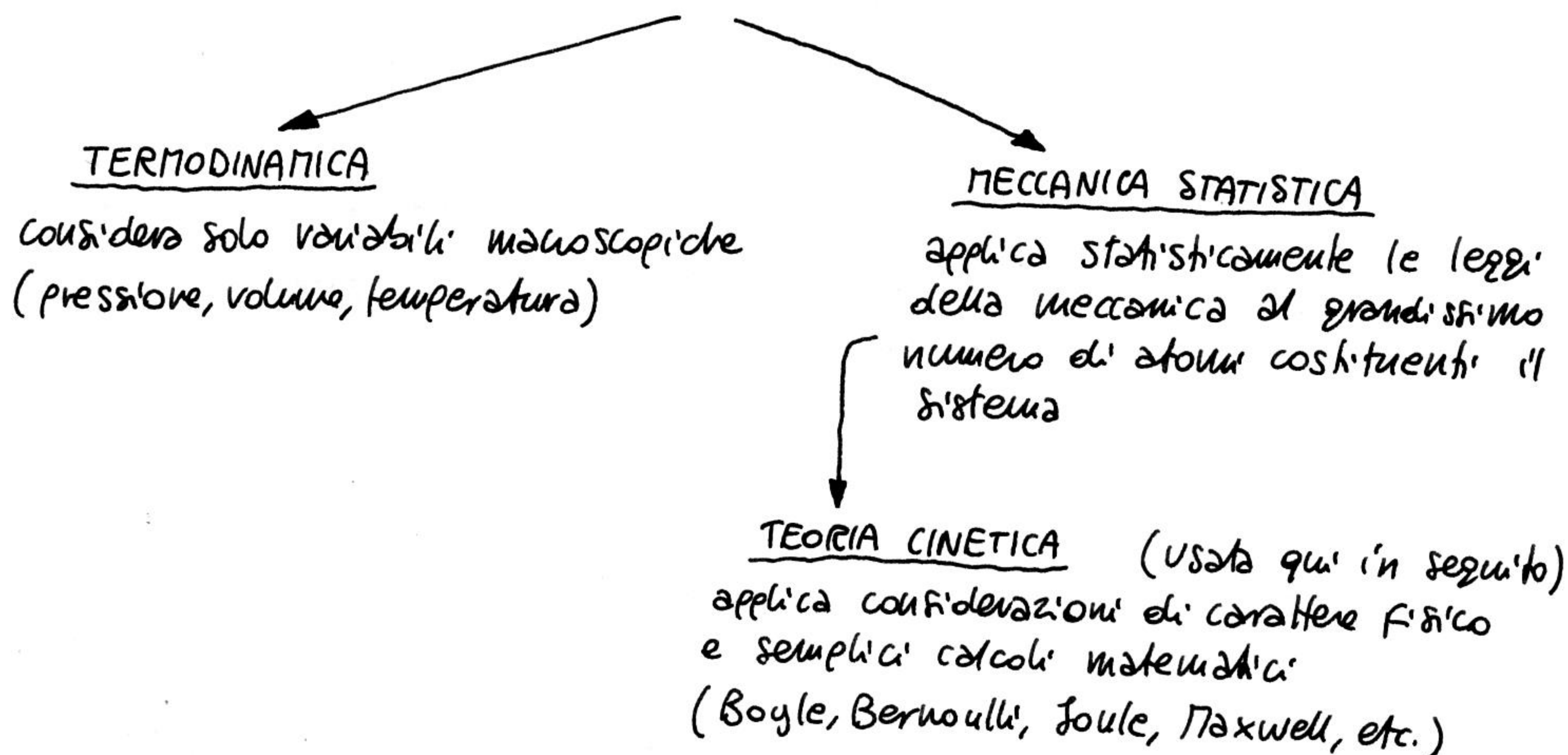
(processo adiabatico in cui non viene compiuto lavoro da o sul sistema)



Si ha $Q=0$ e $L=0$, perciò $\Delta U=0$ e quindi $U_i = U_f$.

Gli stati iniziale e finale sono in equilibrio, ma quelli intermedi no, perciò non si possono rappresentare questi ultimi in un diagramma $P-V$.

23 TEORIA CINETICA DEI GAS - I



Una mole (mol) di una sostanza è la quantità di quella sostanza che contiene un numero di particelle elementari pari a $6,023 \cdot 10^{23}$ (numero di Avogadro). È stato definito che una mole di C^{12} ha una massa di 12 grammi.

Una mole è una quantità di sostanza, ma non la si può esprimere (in grammi, per es.) se non si conoscono le particelle elementari della sostanza (atomi, molecole, ioni, ecc.).

Il peso molecolare M di una sostanza esprime il numero di grammi per mole g/mol di quella sostanza; è una quantità adimensionale.

Numero di Avogadro = $6,023 \cdot 10^{23}$ molecole/mol.

Legge di Avogadro: una mole di qualsiasi gas occupa, a $0^\circ C$ e 1 atm, un volume di 22,414 litri.

[GAS PERFETTO - DESCRIZIONE MACROSCOPICA]

Consideriamo una massa nM di gas contenuta in un recipiente di volume V , dove M = peso molecolare e n = numero di moli. La sua densità è $\rho = \frac{nM}{V}$.

A basse densità tutti i gas mostrano una relazione semplice tra le variabili termodinamiche p , V e T ; un gas perfetto sarebbe un gas che mostra la stessa relazione semplice in qualsiasi condizione.

LEGGE DI BOYLE: $p \propto \frac{1}{V}$ (a T costante)

$$\boxed{pV = \text{cost}}$$

$$\alpha = \frac{1}{273,15 \text{ °K}}$$

LEGGE DI CHARLES & GAY-LUSSAC: $V \propto T$ (a p costante)

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 [1 + \alpha(t - t_0)] \\ p(t) &= p_0 [1 + \alpha(t - t_0)] \end{aligned}$$

Da queste due leggi si ha $\frac{pV}{T} = \text{cost}$

$$\text{(cioè } \frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f} \text{)}$$

Sappiamo che $V \propto m$ (a T e p costanti), perciò possiamo scrivere $\frac{pV}{T} = nR$.

Una volta determinata la costante R , si è visto che questa è la stessa per ogni gas, e vale:

COSTANTE UNIVERSALE DEI GAS PERFETTI

$$R = 8,31 \text{ J/mol K}$$

EQUAZIONE DI STATO DEI GAS PERFETTI

$$\boxed{pV = nRT}$$

Un gas perfetto è un gas che soddisfa a questa relazione in ogni condizione.

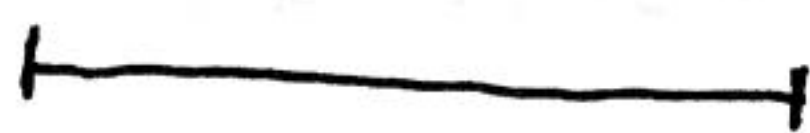
Non esiste un gas perfetto, ma il comportamento di qualsiasi gas reale a densità abbastanza bassa si avvicina al comportamento di un gas perfetto e può essere considerato quindi come tale.



[GAS PERFETTO - DESCRIZIONE MICROSCOPICA]

Definiamo un gas perfetto facendo le ipotesi che seguono:

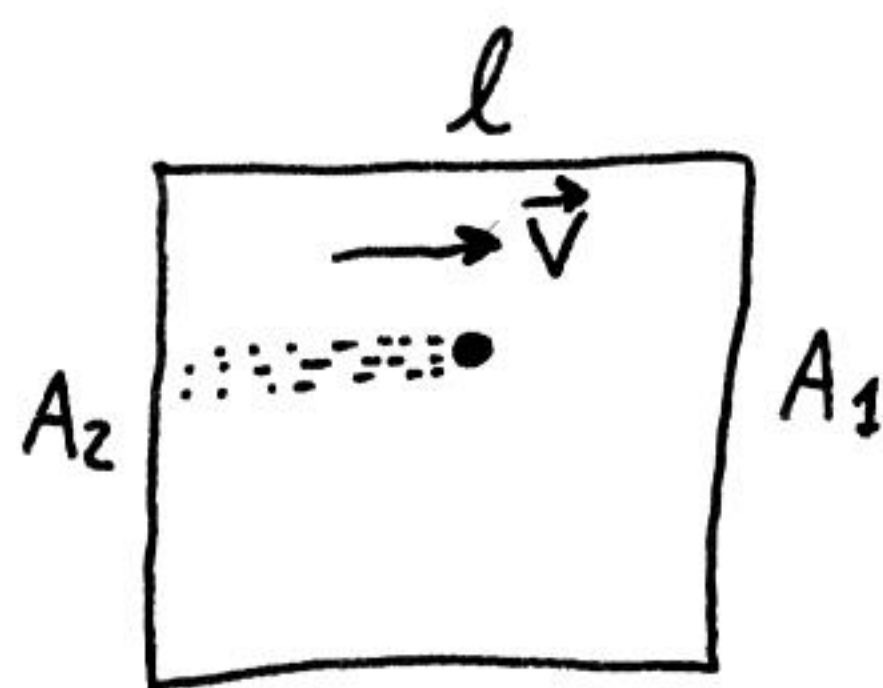
- ① Un gas consiste di particelle chiamate molecole.
- ② Le molecole sono in moto casuale (in varie direzioni e a diverse velocità) e obbediscono alla meccanica newtoniana.
- ③ Il numero totale delle molecole è grande. Quindi, nonostante gli urti, la distribuzione delle velocità molecolari non varia.
- ④ Il volume proprio delle molecole è una piccola parte trascurabile del volume occupato dal gas; perciò questo può essere compresso moltissimo.
- ⑤ Sulle molecole non agisce nessuna forza apprezzabile, se non durante un urto; quindi, nell'intervallo tra due urti, le molecole procedono in linea retta.
(Il peso del gas è trascurabile se il gas non è molto esteso, come avviene invece per l'atmosfera)
- ⑥ Gli urti con le pareti e tra molecole sono perfettamente elastici (quindi si conservano energia cinetica e QM) e sono di durata trascurabile (con possiamo trascurare il tempo impiegato nello scambio "energia cinetica $\rightarrow$ energia potenziale di deformazione $\rightarrow$ energia cinetica").



Il lavoro fatto da un gas perfetto che si espande isotermicamente da V_i a V_f è:

$$\begin{aligned} L &= \int_{V_i}^{V_f} p \, dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} \, dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT (\log V_f - \log V_i) = \\ &= nRT \log \frac{V_f}{V_i} \end{aligned}$$

~ CALCOLO CINETICO DELLA PRESSIONE ~



Consideriamo un gas perfetto in un recipiente cubico di lato l , orientato secondo gli assi x, y, z e consideriamo una molecola che ha velocità $\vec{v}$, scomposta nelle componenti v_x, v_y, v_z e consideriamo il suo moto nella direzione dell'asse x .

Quando la molecola si scontra con la faccia A_1 , la componente v_x cambia di segno, poiché la molecola rimbalza e torna indietro. La variazione di QM è perciò

$$\Delta q = q_f - q_i = m(-v_x) - mv_x = -2mv_x$$

e poiché gli urti li consideriamo elastici, A_1 deve aver acquistato una QM pari a $2mv_x$.

La molecola percorre il lato del cubo in un tempo l/v_x , e compie il percorso A_1-A_2 e viceversa in un tempo $2l/v_x$. Quindi il numero di collisioni con A_1 per unità di tempo è $v_x/2l$, e la QM trasmessagli per unità di tempo (= forza) è

$$2mv_x \frac{v_x}{2l} \quad \text{cioè} \quad \frac{m}{l} v_x^2$$

Considerando tutte le particelle otteniamo la forza totale su A_1 , e dividendo poi per la superficie di A_1 ($=l^2$) otteniamo la pressione

$$p = \frac{1}{l^2} \frac{m}{l} (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + v_{x3}^2 + v_{x4}^2 + \dots)$$

Se N è il numero totale di particelle e n_v il numero per unità di volume, si ha $n_v = N/l^3$ cioè $l^3 = N/n_v$, e quindi

$$p = \frac{n_v}{N} m (v_{x1}^2 + \dots) \quad \text{cioè} \quad p = n_v m \frac{(v_{x1}^2 + \dots)}{N}$$

Ma $n_v m$ è la densità, e $\frac{(v_{x1}^2 + \dots)}{N}$ è la ~~media~~ media di v_x^2 per tutte le particelle, quindi

$$p = \rho \overline{v_x^2}$$

Per qualsiasi particella si ha $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Poiché vi è un grandissimo numero di particelle ed esse si muovono a caso, si ha $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$, ovvero $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$ e quindi

$$p = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}$$

↑
quantità macroscopica
↑
quantità microscopica
 in relazione tra loro

VELOCITÀ QUADRATICA MEDIA delle molecole

$$v_{qm} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$$

Abbiamo trascurato gli urti tra particelle perché gli urti elastici tra particelle identiche hanno l'effetto di scambiare le velocità e quindi il risultato globale è inalterato.

~~conosciamo la velocità quadratica media delle molecole~~

~ CALCOLO CINETICO DELLA TEMPERATURA ~

$$p = \frac{1}{3} \rho \bar{v}^2$$

moltiplichiamo entrambi i membri per $V = \text{volume}$

$$Vp = \frac{1}{3} \rho V \bar{v}^2$$

$\rho V = \text{massa totale del gas} = nM$ dove $n = \text{numero moli}$;
 $M = \text{peso molecolare}$

$$Vp = \frac{1}{3} nM \bar{v}^2$$

$$Vp = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} nM \bar{v}^2$$

sappiamo che $e^- pV = nRT$

$$nRT = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} nM \bar{v}^2$$

$$\frac{1}{2} M \bar{v}^2 = \frac{3}{2} RT$$

quindi l'energia cinetica di traslazione delle molecole di un gas e^- proporzionale alla sua temperatura assoluta

$$\left(\frac{1}{2} nM \bar{v}^2 = \frac{3}{2} nRT \text{ per } n \text{ moli} \right)$$

le velocità (e quindi l'energia cinetica di traslazione) delle molecole di un gas vanno misurate rispetto al CM del gas; il CM e^- fermo, a causa della distribuzione statistica delle velocità del grandissimo numero di molecole presenti. Perciò l'energia cinetica va misurata secondo un sist. di rif. in cui il CM sia in quiete. Un gas in un recipiente non aumenta di temperatura se si mette il recipiente in un treno in movimento!

$$\frac{1}{2} M \bar{v}^2 = \frac{3}{2} RT$$

dividiamo entrambi i membri per $N_0 = \text{num. di Avogadro}$

$$\frac{1}{2} \frac{M}{N_0} \bar{v}^2 = \frac{3}{2} \frac{R}{N_0} T$$

$m = \text{massa di una singola molecola}$

COSTANTE DI BOLTZMANN

$$k = \frac{8,314 \text{ J/mol K}}{6,023 \cdot 10^{23} \text{ molecole/mol}} = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J/molecola K}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k T}$$

e^- energia cinetica traslazionale media per ogni molecola

FORZE INTERMOLECOLARI

Quando due molecole si avvicinano tra di loro, le cariche elettriche su di esse (elettroni e protoni) si spostano in modo che la distanza tra cariche opposte è minore della distanza tra cariche dello stesso segno; quindi le molecole si attraggono. Se si avvicinano ancora di più, la forza diventa repulsiva per evitare che le cariche si compenetrino tra loro; quindi le molecole durante un urto rimbalzano.

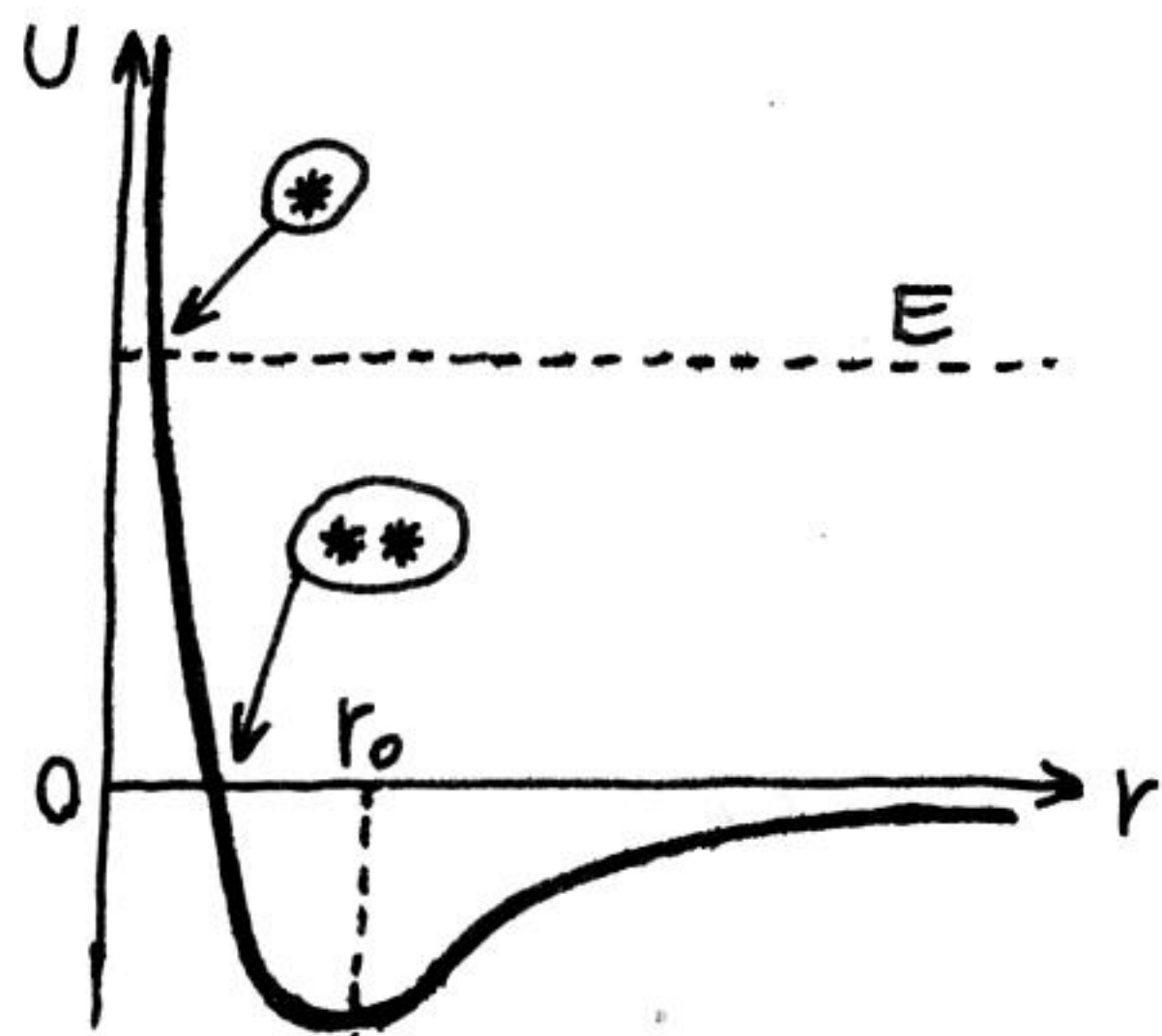


Grafico dell' Energia potenziale reciproca fra molecole

$E = K + U =$ energia meccanica totale

(*) = "punto di inversione del moto"

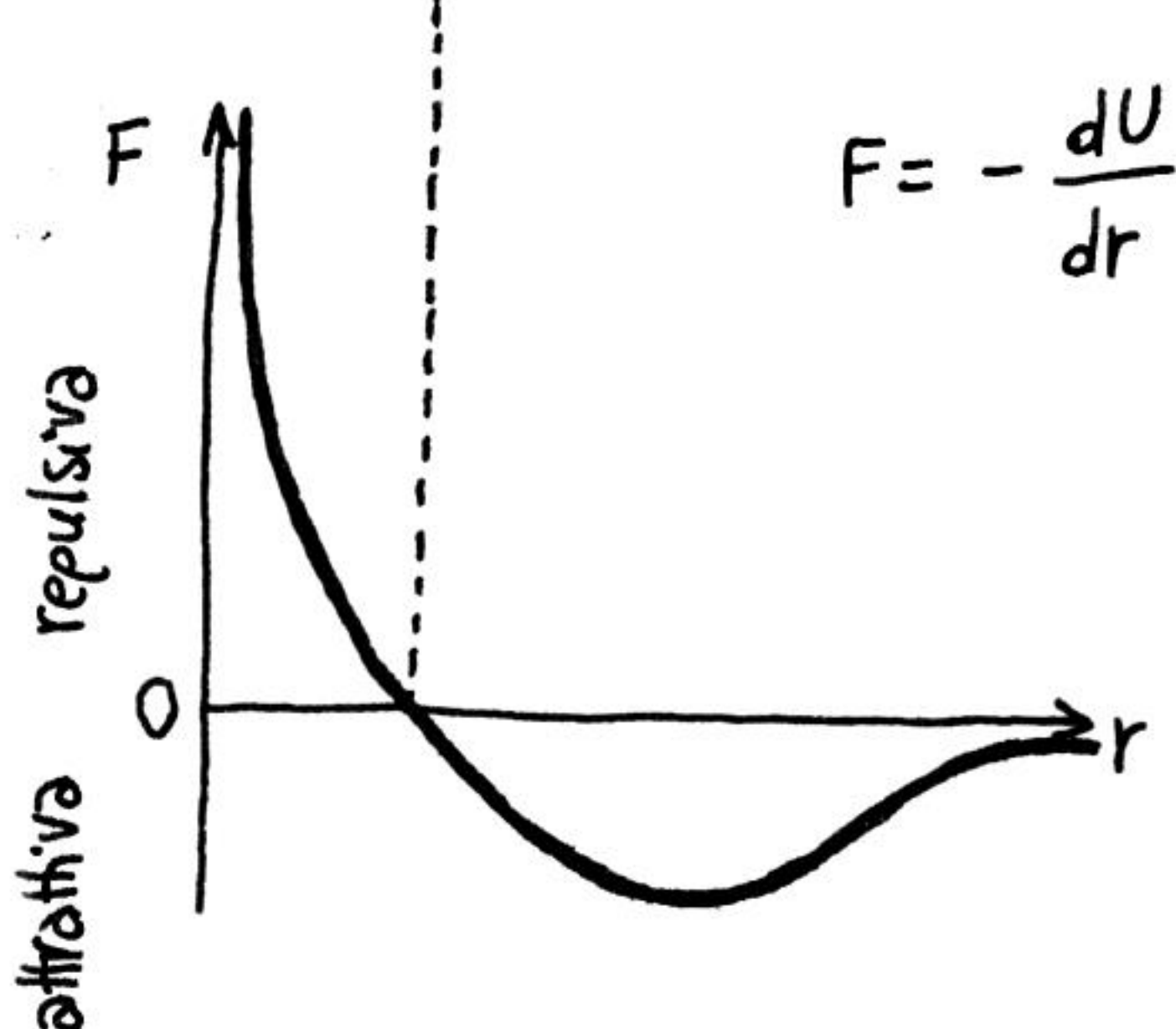


Grafico della Forza agente

$$F = - \frac{dU}{dr}$$

$r_0 =$ distanza di equilibrio fra molecole (energia potenziale minima, forza agente nulla)

$r^{(**)} =$ distanza approx di max avvicinamento in un urto = diametro della molecola

Diametro di una molecola semplice: $2,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Distanza alla quale cessa il raggio d'azione delle molecole: 4 diametri.

Distanza di equilibrio r_0 per molecole semplici: $3,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Stato solido: le molecole vibrano in un intorno di r_0 , il loro potenziale $e' < 0$ e non possono uscire dalla buca di potenziale. I centri di vibrazione sono fissi.

Stato liquido: i centri di vibrazione sono liberi, ma rimangono sempre circa alla stessa distanza.

Stato gassoso: molecole libere, max energia cinetica.

"Invece di dire che le particelle sono sferiche, rigide e elastiche, possiamo dire che le particelle sono centri di forza la cui azione è sensibile solo a piccola distanza, quando tale azione appare come forza repulsiva di grande intensità"

(Maxwell) (1873)

due atomi di He a distanza $4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$:

$$\text{forza intermolecolare} = 6 \cdot 10^{-13} \text{ N}$$

$$\text{forza gravitazionale} = 7 \cdot 10^{-42} \text{ N} \quad (\text{molto più piccola !!!})$$

poiché le masse delle particelle sono piccolissime (10^{-26} kg), le forze intermolecolari producono accelerazioni grandissime (10^{15} m/s^2).

CALORI SPECIFICI DI UN GAS PERFETTO

Tra le molecole di un gas perfetto non ci sono forze se non durante gli urti, e in un urto le molecole non si deformano; non c'è quindi energia potenziale, e l'energia interna di un gas è interamente cinetica. Abbiamo visto che l'energia cinetica traslazionale per ogni molecola è ~~data~~ $\frac{3}{2} kT$; quindi, per un gas contenente N molecole,

$$U = \frac{3}{2} N k T = \frac{3}{2} N \frac{R}{N_0} T = \frac{3}{2} \frac{N}{N_0} R T = \frac{3}{2} n R T \quad (n = \text{numero di moli})$$

~~Questo~~ (energia cinetica traslazionale, non rotazionale o vibrazionale; perciò questo vale solo x gas monoatomici)

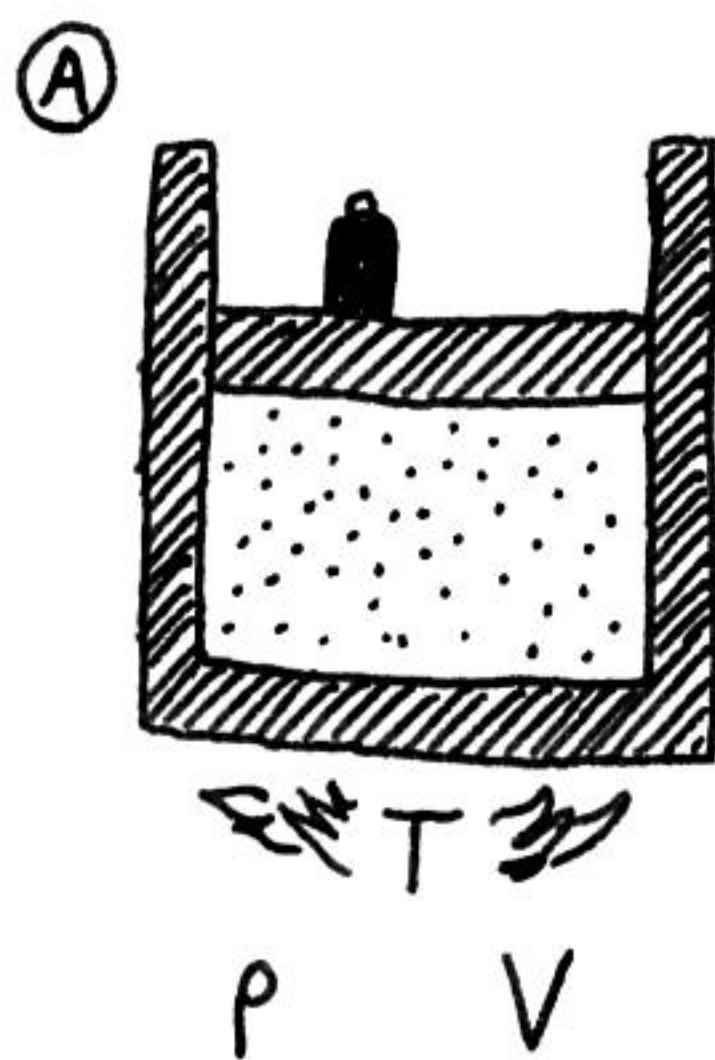
Quindi l'energia interna di un gas perfetto è proporzionale alla temperatura assoluta e dipende solo da essa.

CALORE SPECIFICO MOLARE

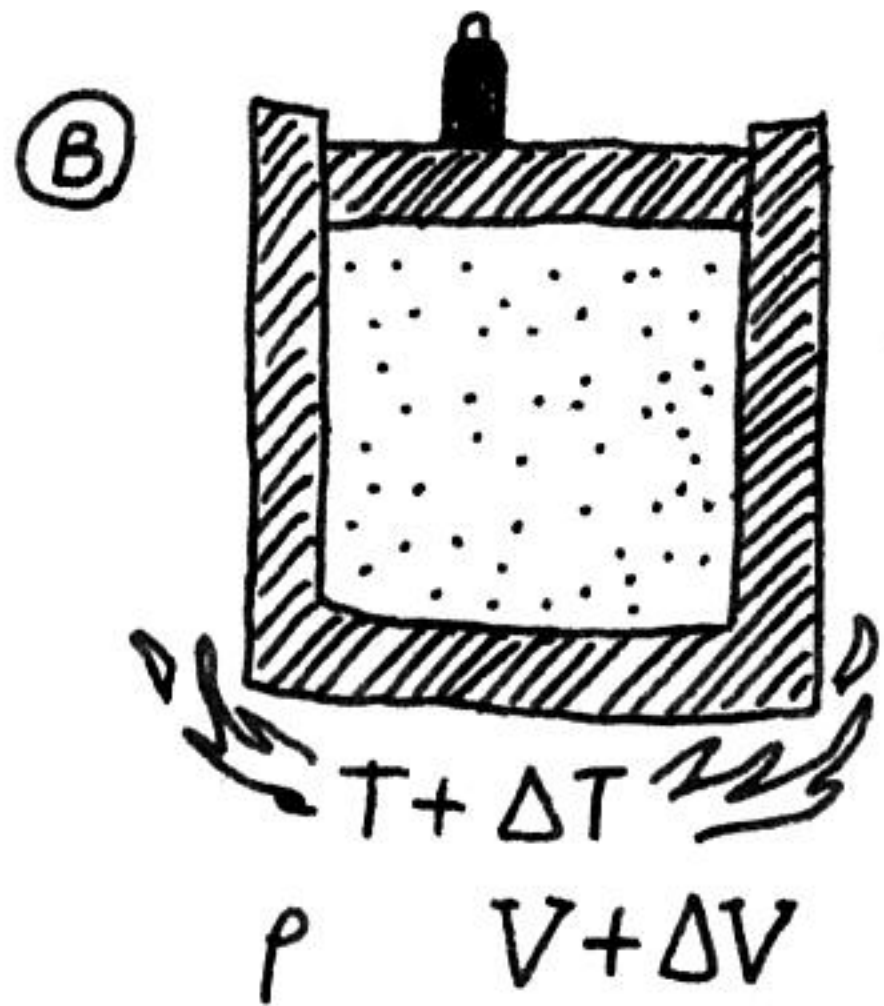
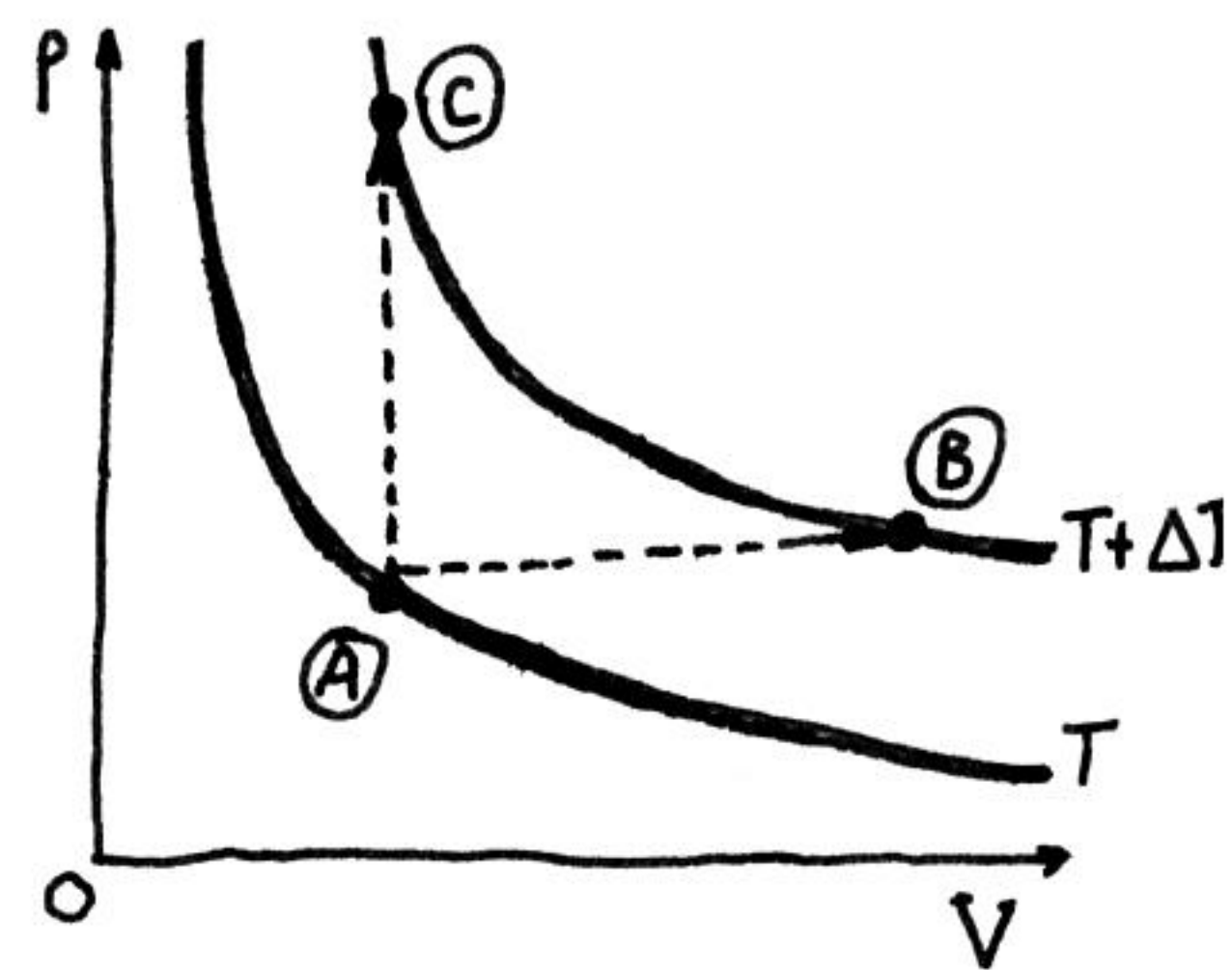
(calore per mole richiesto per aumentare di 1°C la sua temperatura)

$\left\{ \begin{array}{l} \text{--- a volume costante, } C_v \\ \text{--- a pressione costante, } C_p \end{array} \right.$

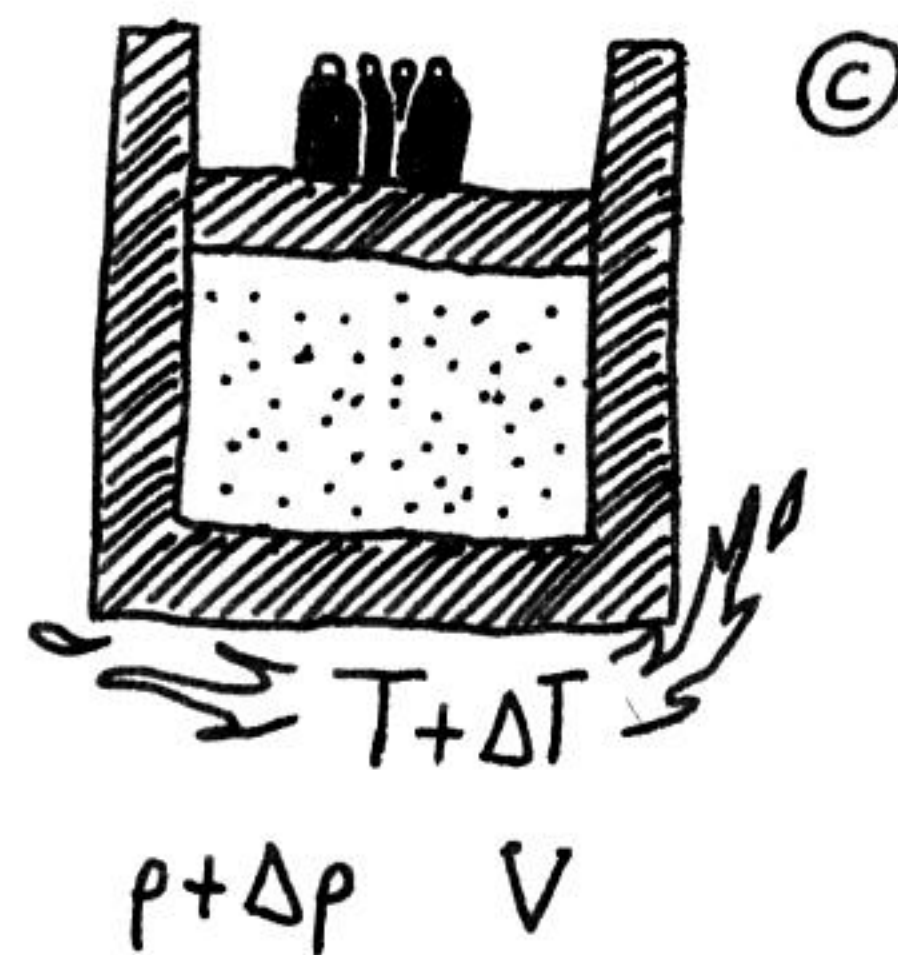
TRASFORMAZIONE
A PRESSIONE
COSTANTE



TRASFORMAZIONE
A VOLUME
COSTANTE



(aumentando la temperatura)



$$\Delta U = Q - L$$

qui $Q = n C_p \Delta T$ e $L = p \Delta V$

perciò $\Delta U = n C_p \Delta T - p \Delta V$

$$\Delta U = Q - L$$

qui $Q = n C_v \Delta T$ e $L = 0$

perciò $\Delta U = n C_v \Delta T$

poiché nelle due trasformazioni la temperatura è aumentata della stessa quantità ΔT , deve essere uguale anche la variazione ΔU di energia interna:

$$n C_p \Delta T - p \Delta V = n C_v \Delta T$$

e, dalla relazione $p \Delta V = n R \Delta T$, si ottiene:

$$n C_p \Delta T - n R \Delta T = n C_v \Delta T$$

$$\boxed{C_p - C_v = R}$$

possiamo utilizzare la relazione
 $U = \frac{3}{2} n R T$:

$$C_v = \frac{\Delta U}{n \Delta T}$$

$$C_v = \frac{dU}{n dT} = \frac{d}{n dT} \left(\frac{3}{2} n R T \right) = \frac{3}{2} R$$

Questo detto è valido solo per
gas monoatomici; è sbagliatissimo
per gas poliatomici

Finora abbiamo considerato una molecola come una particella rigida, la cui energia è tutta sotto forma di energia cinetica traslazionale. Possiamo considerarla un oggetto dotato di struttura interna, capace quindi di immagazzinare energia e quindi possederla sotto altre forme?

Consideriamo un gas composto da un gran numero di molecole, considerate dotate di struttura interna. L'energia ~~complessiva~~ totale comprenderà vari tipi di energia assorbita (gradi di libertà):

energia cinetica traslazionale delle molecole	$\frac{1}{2} m \bar{V}_x^2$	
" " rotazionale " "	$\frac{1}{2} I \omega_x^2$	
" " di vibrazione degli atomi nella molecola	$\frac{1}{2} \mu \bar{V}^2$	(μ = massa ridotta)
" potenziale " " " " " "	$\frac{1}{2} k x^2$	

"Quando c'è un gran numero di molecole e valgono le leggi della meccanica newtoniana, l'energia totale è equipartizionata tra tutti i termini, che hanno lo stesso valor medio, dipendente solo dalla temperatura" (TEOREMA DELL'EQUIPARTIZIONE DELL'ENERGIA by Maxwell)

Sappiamo che l'energia cinetica traslazionale per una mole di molecole è $\frac{3}{2} RT$; perciò ognuno dei tre termini $\frac{1}{2} n \bar{V}_x^2$, $\frac{1}{2} n \bar{V}_y^2$, $\frac{1}{2} n \bar{V}_z^2$ dell'energia cinetica traslazionale riferiti ai 3 assi coordinati vale $\frac{1}{2} RT$.

Gas monoatomici: solo energia cinetica traslazionale.

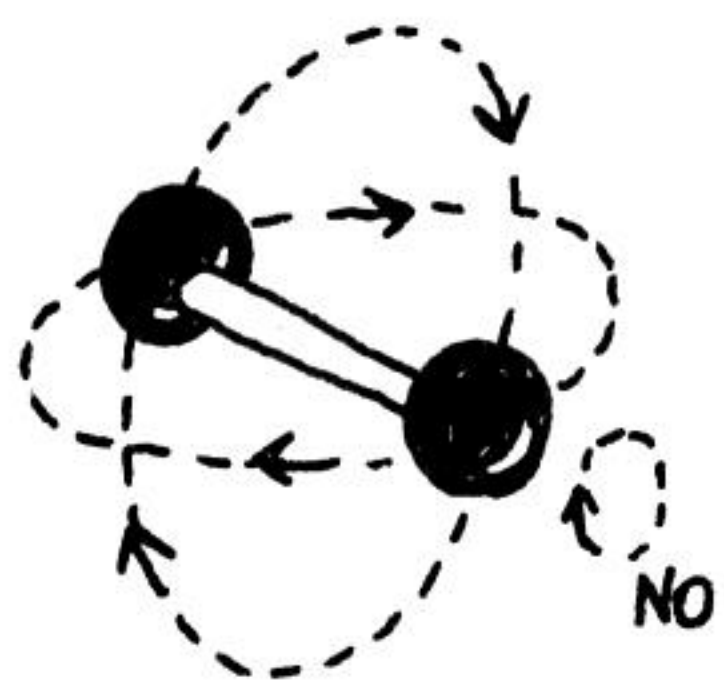
$$U = \frac{3}{2} nRT. \text{ Sappiamo che } C_V = \frac{3}{2} R \text{ (perché } C_V = \frac{dU}{n dT} \text{)}$$

$$C_P - C_V = R \rightarrow C_P = R + C_V = \frac{5}{2} R ;$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3} \approx 1,67.$$

(Qui e successivamente, abbiamo supposto l'atomo come massa puntiforme, perciò non ha moto rotazionale su se stesso)

Gas biatomico: consideriamo la molecola composta da due masse puntiformi collegate tra loro da un manubrio. Ha moto traslatorio e rotatorio attorno a tre assi perpendicolari tra loro, ma la rotazione attorno all'asse passante per il manubrio è da trascurare essendo le masse puntiformi.



$$U = \frac{3}{2} n R T + 2n \left(\frac{1}{2} R T \right) = \frac{5}{2} n R T. \quad C_V = \frac{5}{2} R$$

$$C_p - C_V = R \rightarrow C_p = R + C_V = \frac{7}{2} R$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5} = 1,40.$$

Gas poliatomico: la molecola è costituita da 3 o più masse (atomi) sferiche collegate tra loro da manubri. Moto traslatorio e rotatorio.

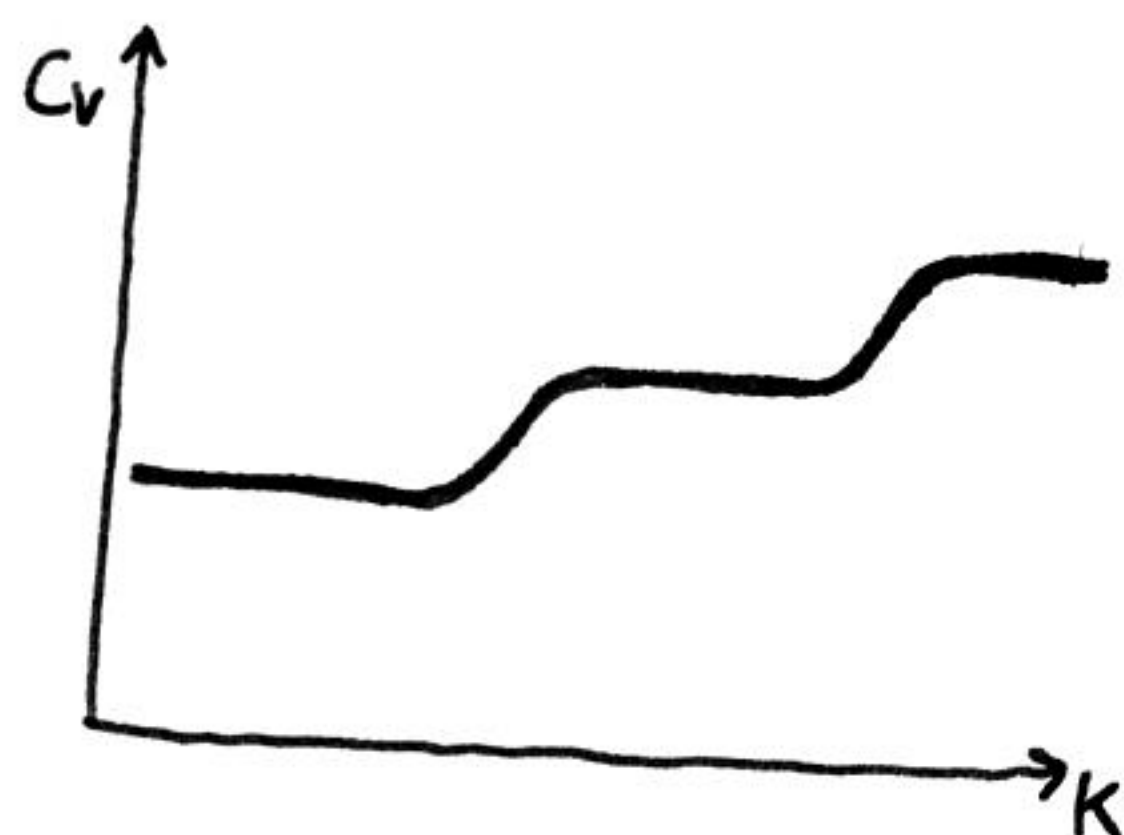
$$U = \frac{3}{2} n R T + 3n \left(\frac{1}{2} R T \right) = 3 n R T. \quad C_V = 3 R$$

$$C_p - C_V = R \rightarrow C_p = R + C_V = 4 R$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{4}{3} \approx 1,33.$$

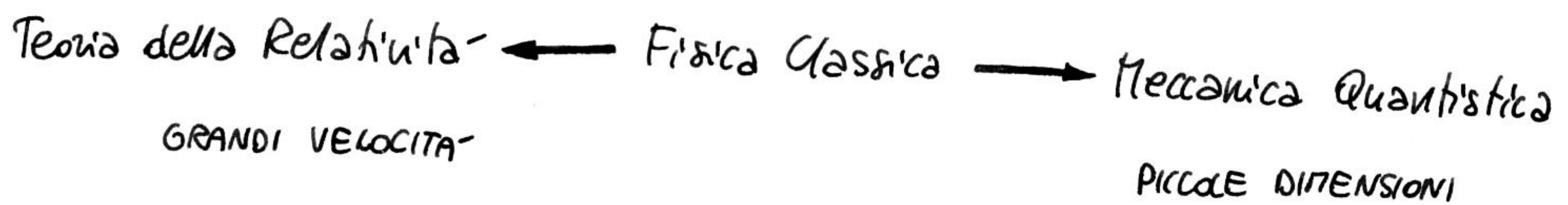
I valori sperimentali di γ per i vari gas mono/bi/poliatomici si avvicinano a questi valori teorici, ma non sono esatti. Ciò perché dovremmo considerare anche la parte vibrazionale (potenziale e cinetica) dell'energia, il che si fa considerando gli atomi nella molecola collegati da molle anziché da manubri rigidi. Così però non otteniamo più un modello fondamentale, ma un modello empirico che varia da gas a gas.

Il C_V dell'idrogeno ^{e di molti altri gas} è costante solo in certi intervalli, esso in effetti aumenta con l'aumentare della temperatura.



Ciò è spiegabile se si ammette che la molecola a basse temperature abbia solo energia traslazionale; aumentando la temperatura diviene possibile la rotazione, e con un ulteriore aumento di temperatura la molecola può acquistare energia vibrazionale.

Ma ciò è in contraddizione con il teorema dell'equipartizione dell'energia che afferma che una variazione di energia deve essere egualmente suddivisa fra i vari tipi di energia e che non esiste un meccanismo classico che permetta di ~~permanente~~ aumentare ~~l'energia~~ un solo tipo di energia. Perciò per lo studio della struttura dell'atomo non è valida la fisica classica



24 TEORIA CINETICA DEI GAS - II

Le molecole di un gas, tra due collisioni successive, si muovono in linea retta con velocità costante. Il CAMMINO LIBERO MEDIO è la distanza media percorsa da una molecola tra due urti successivi; esso ovviamente dipende dalla grandezza delle molecole e dal numero di molecole per unità di volume.

Se le molecole hanno diametro d , un urto tra due di esse avviene quando esse si avvicinano a una distanza $< d$; si può anche considerare la cosa come se una molecola avesse di diametro equivalente $2d$ e le altre fossero puntiformi -



Una molecola di diametro equivalente $2d$ che si muove a velocità v spazza in un tempo t , un cilindro di sezione πd^2 e lunghezza vt , e quindi volume $\pi d^2 vt$.

Se n_v è il numero di molecole per unità di volume, il numero di molecole presenti nel cilindro = numero di urti in un tempo $t = \pi d^2 vt n_v$.

Cammino libero medio = $\frac{\text{distanza totale } vt \text{ percorsa in un tempo } t}{\text{numero di urti in quel tempo } t}$ cioè

$$\bar{l} = \frac{vt}{\pi d^2 vt n_v} = \frac{1}{\pi d^2 n_v}$$

Qui noi abbiamo supposto che le altre molecole non si muovano.

In realtà si muovono, perciò nell'ultima equazione

la v al numeratore è $\bar{v}$ = velocità media della molecola rispetto al cilindro, la v al denominatore è $\bar{v}_{rel}$ = velocità media " " rispetto alle altre molecole, e con un calcolo quantitativo si dimostra che $\bar{v}_{rel} = \sqrt{2} \bar{v}$, perciò

$$\bar{l} = \frac{1}{\pi d^2 \sqrt{2} n_v}$$

A livello del mare, sulla Terra, ~~■~~ per le molecole d'aria $\bar{e} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$.

In un esperimento di laboratorio, non ha senso calcolare $\bar{e}$ per un gas in un recipiente sotto vuoto anche modesto, perché quasi tutti gli urti avvengono con le pareti del recipiente.

In un fotosincrotrone, si forza un protone, con campi magnetici, a percorrere una traiettoria circolare in modo che possa avere un $\bar{e} = 100'000 \text{ km}$.

DISTRIBUZIONE MAXWELLIANA DELLE VELOCITÀ MOLECOLARI

Le velocità delle molecole in un gas variano in una vasta gamma di valori. Se tutte le molecole del gas avessero stessa velocità, ciò dopo un po' non sarebbe più vero, a causa della ridistribuzione delle velocità, dovuta agli urti.

LEGGE DI DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITÀ MOLECOLARI DI MAXWELL:

$$N(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-(mv^2/2kT)}$$

$$N(v) = \frac{\text{molecole}}{\text{cm/s}}$$

$N(v)$ = numero delle molecole del gas aventi velocità compresa tra v e ~~avanti~~ $v+dv$;
come si vede, dipende solo dalla temperatura assoluta T

N = numero di molecole contenute nel gas

m = massa di una molecola

k = costante di Boltzmann

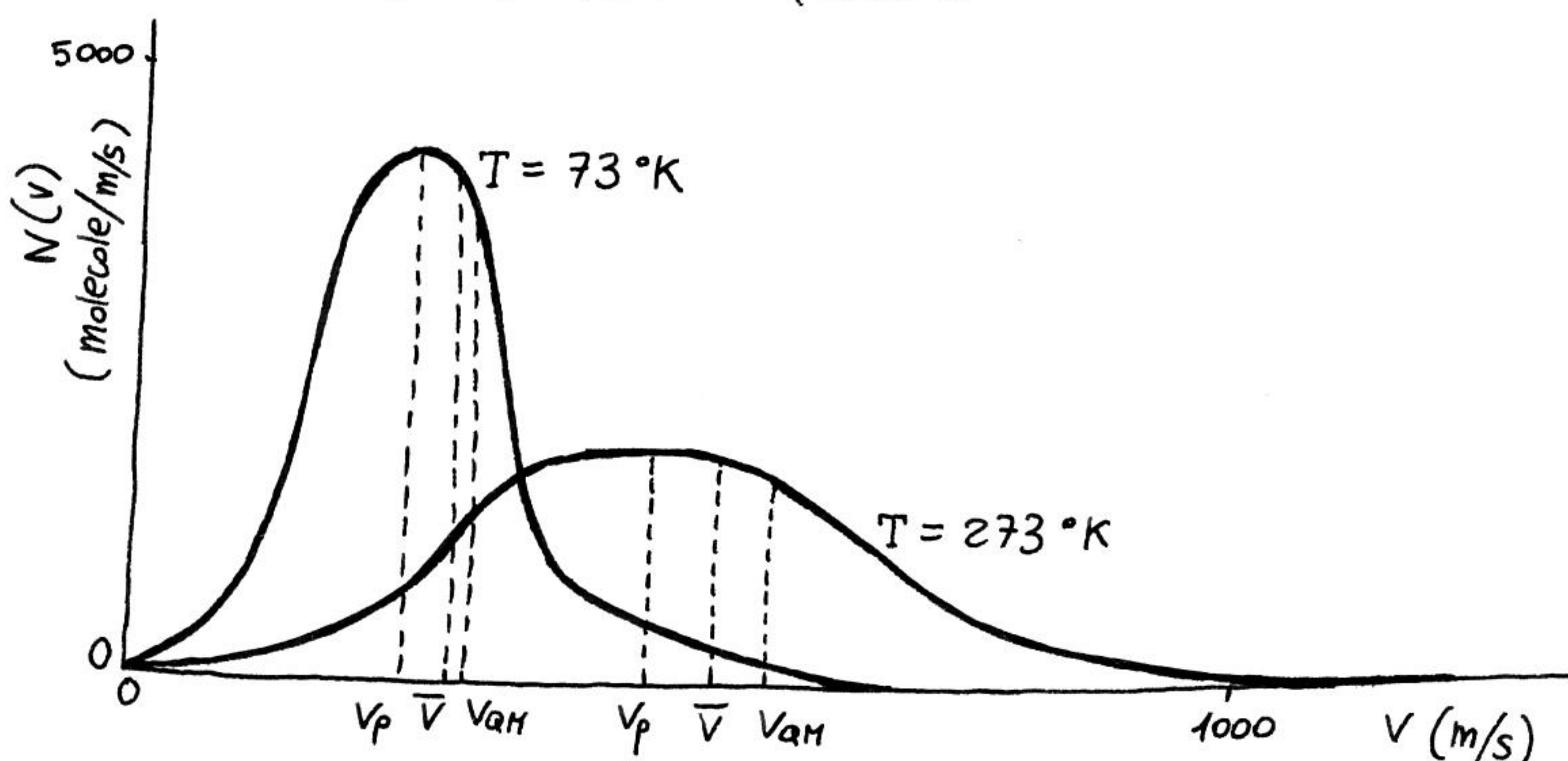
Il numero totale di molecole del gas sarà dato dalla somma totale delle molecole aventi tutte le velocità:

$$N = \int_0^{\infty} N(v) dv$$

A una data T , minore è m , maggiore è la percentuale di molecole ad alta velocità.

Nota: noi ~~non~~ parliamo di molecole aventi "velocità compresa tra v e $v+dv$ " e non "velocità v " perché, essendo infinite le velocità possibili (basta prendere infiniti decimali: es. $330,69543218 \dots \text{ m/s}$) e finito il numero di molecole, il numero di molecole aventi una velocità definita v è zero.

Distribuzione maxwelliana delle velocità di 10^6 molecole di ossigeno
a due diverse temperature

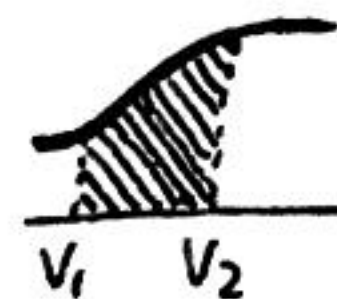


v_p = valore più probabile = massimo della funzione

$\bar{v}$ = velocità media

v_{qm} = velocità quadratica media = radice quadrata della somma dei quadrati delle velocità

Il numero di molecole aventi velocità compresa tra v_1 e v_2 è l'area delimitata dalle ordinate passanti per v_1 e v_2 e sottostante al grafico.



La curva non è simmetrica perché la velocità minima deve essere 0, mentre non c'è un limite classico per la velocità massima di una molecola (anche se è improbabile che una molecola abbia velocità molto maggiore di $\bar{v}$, e tale improbabilità aumenta con l'aumentare del disavanzo), e quindi c'è uno "strascico" alla destra del grafico; e per questo che $v_p < \bar{v} < v_{qm}$.

Aumentando la temperatura, v_p , $\bar{v}$, v_{qm} aumentano, in accordo alla definizione microscopica cinetica di temperatura.

L'area totale sottostante la curva (che rappresenta il numero totale di molecole, in questo caso 10^6) deve restare costante, perciò la distribuzione si allarga e si appiattisce. Aumenta il numero di molecole con velocità maggiori di un certo valore, e ciò spiega l'aumento di possibili reazioni chimiche con l'aumentare della temperatura.

In un liquido, solo le molecole più veloci possono sfuggire all'attrazione delle molecole della superficie e disperdersi nell'aria. Poiché sono sfuggite le molecole più veloci, l'energia cinetica totale, e quindi la temperatura, diminuisce. È per questo che l'evaporazione provoca raffreddamento.

MOTO BROWNIANO : piccole particelle (polvere, polline, ecc.) sospese in un liquido o in un gas si muovono di moto casuale (osservabile al microscopio). Ciò perché tali particelle partecipano al moto molecolare (si comportano come molecole di grandi dimensioni) e hanno la stessa ~~media~~ ^{a causa della grandezza} energia cinetica media molecolare, $\frac{3}{2}kT$. Le particelle si potrebbero ^{a causa della grandezza} posare sul fondo del recipiente, se non fossero continuamente urtate dalle molecole del liquido o gas. Maggiore è la grandezza di tali particelle e il numero di molecole nel liquido o gas, più gli urti si distribuiscono equamente sui vari lati della particella e minore è il moto browniano casuale.

EQUAZIONE DI STATO DI VAN DER WAALS DEI GAS REALI

L'equazione $PV = nRT$ descrive lo stato dei gas perfetti ed è approssimativamente valida anche per gas reali a bassa densità, ma per studiare gas reali ad alte densità occorre considerare che:

- le molecole del gas reale occupano un volume, perciò il volume libero a disposizione del gas è minore.

Chiamiamo $v = \frac{V}{n}$ = volume per mole. $b = \text{COVOLUME}$ = volume proprio delle molecole del gas. Il volume libero per il gas è allora $(v - b)$.
In media, in condizioni normali $b = 0,15\%$ del volume libero disponibile.

- le molecole del gas reale esercitano forze tra di loro, perciò questi legami determinano una pressione aggiuntiva alla pressione del gas.

Consideriamo un gas dentro un recipiente; le molecole della parte destra esercitano delle forze sulle molecole della parte sinistra, e viceversa. Moltiplicando ora il numero delle molecole nel recipiente, ogni molecola della parte destra interagisce con un numero triplo di molecole nella parte sinistra, e così fanno le molecole della parte sinistra. Per cui il numero di legami è 9 volte maggiore, adesso.

Il numero di legami è quindi proporzionale al quadrato del numero di molecole per unità di volume. Pressione aggiuntiva $\propto$ numero di legami $\propto \left(\frac{n}{V}\right)^2 = \frac{1}{v^2}$;
Pressione aggiuntiva = $\frac{a}{v^2} = \text{PRESSIONE INTERNA}$

L'equazione di stato di Van Der Waals dei gas reali e' quindi:

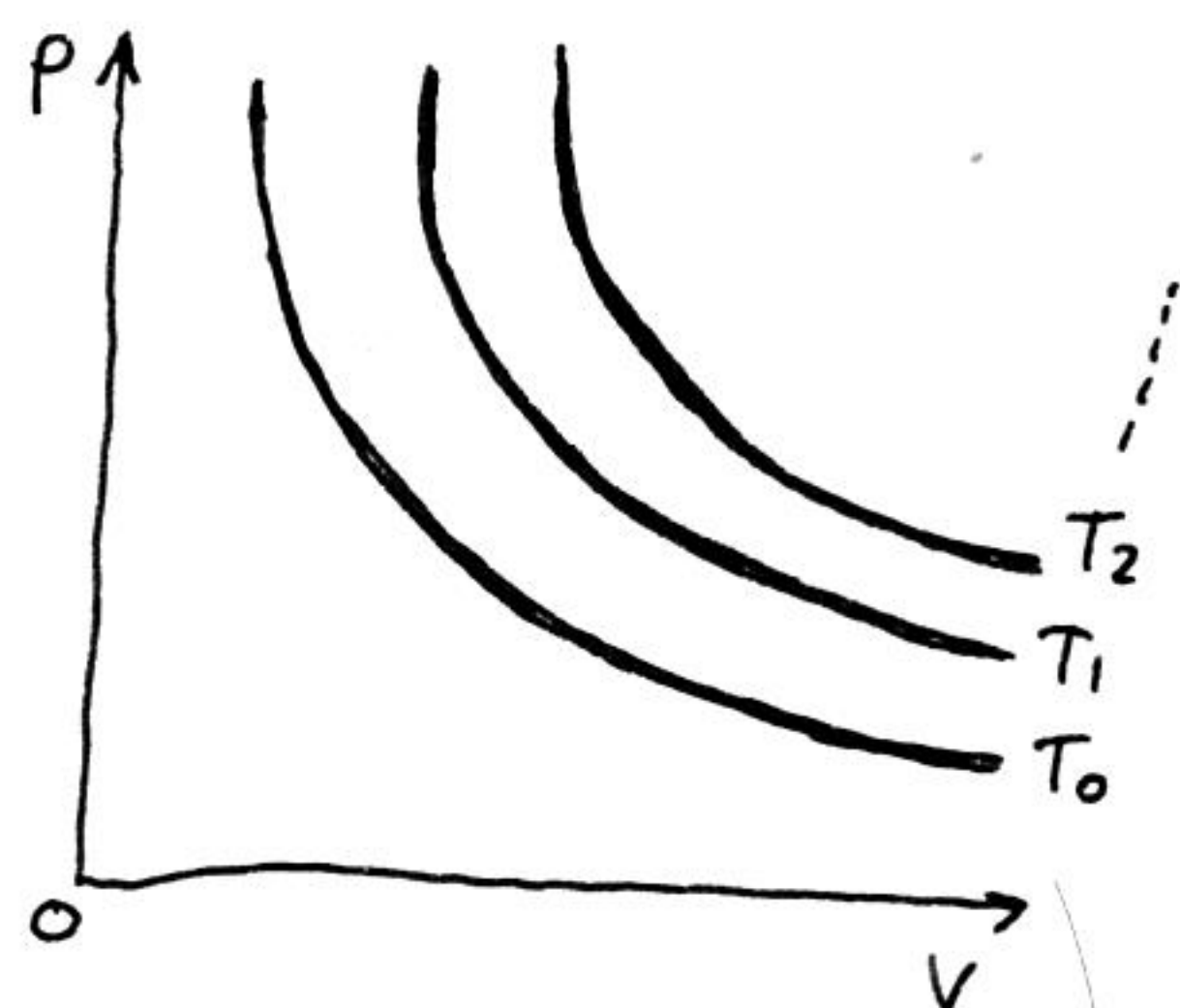
$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

a e b sono delle costanti che vanno determinate in maniera empirica. Tale equazione di stato e' ancora una semplificazione ed e' sbagliata in alcuni casi particolari, ma non esiste una formula semplice valida per tutti i gas in tutte le condizioni.

L'energia interna U di un gas reale dipende sia dalla temperatura che dal volume.

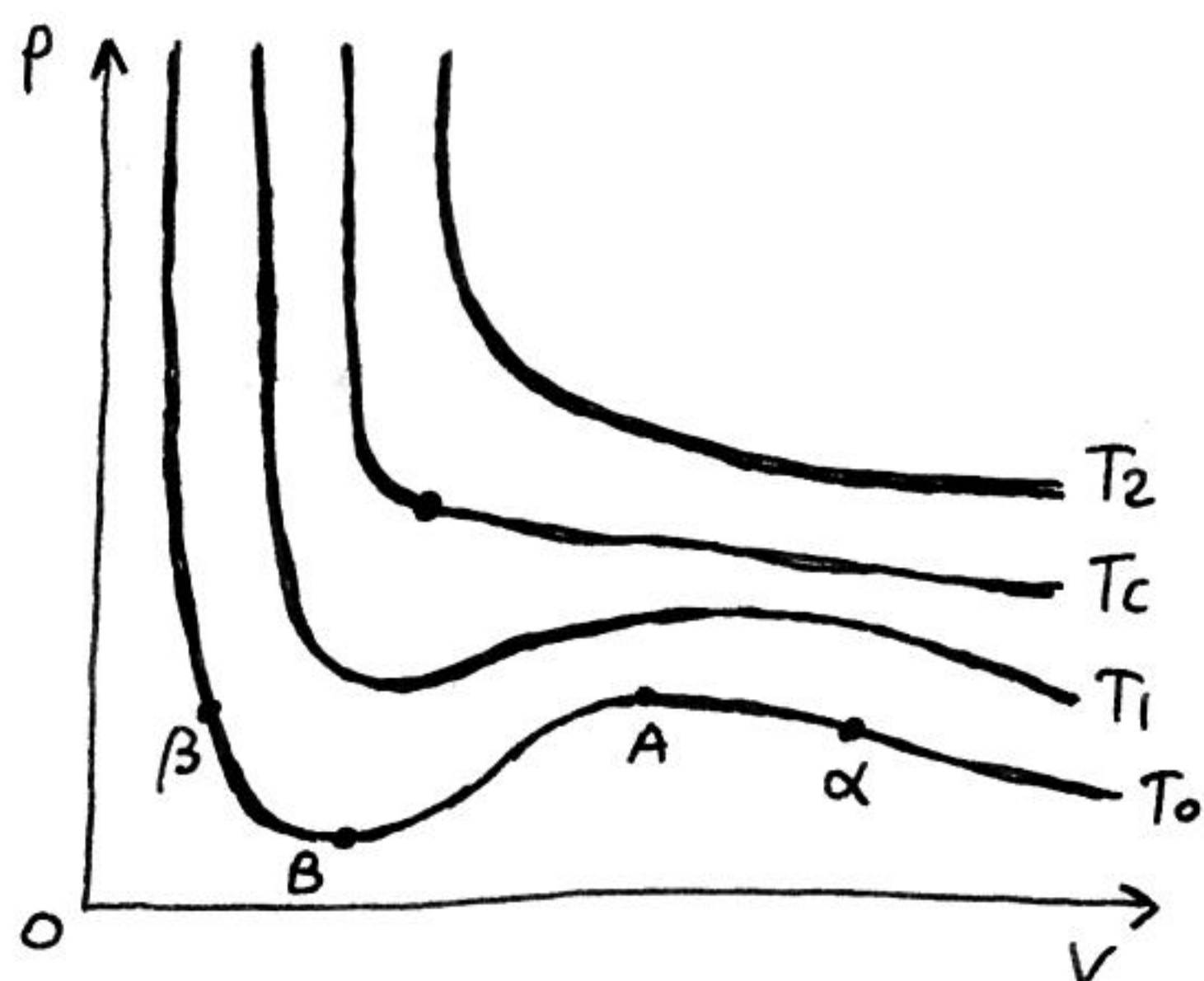
ISOTERME DI UN GAS REALE

L'equazione di stato di un gas perfetto e' $PV = RT$, il cui grafico ~~mostrerebbe~~ ~~equivalente~~ (rami di un'iperbole equilatera) e':



$$T_0 < T_1 < T_2 < \dots$$

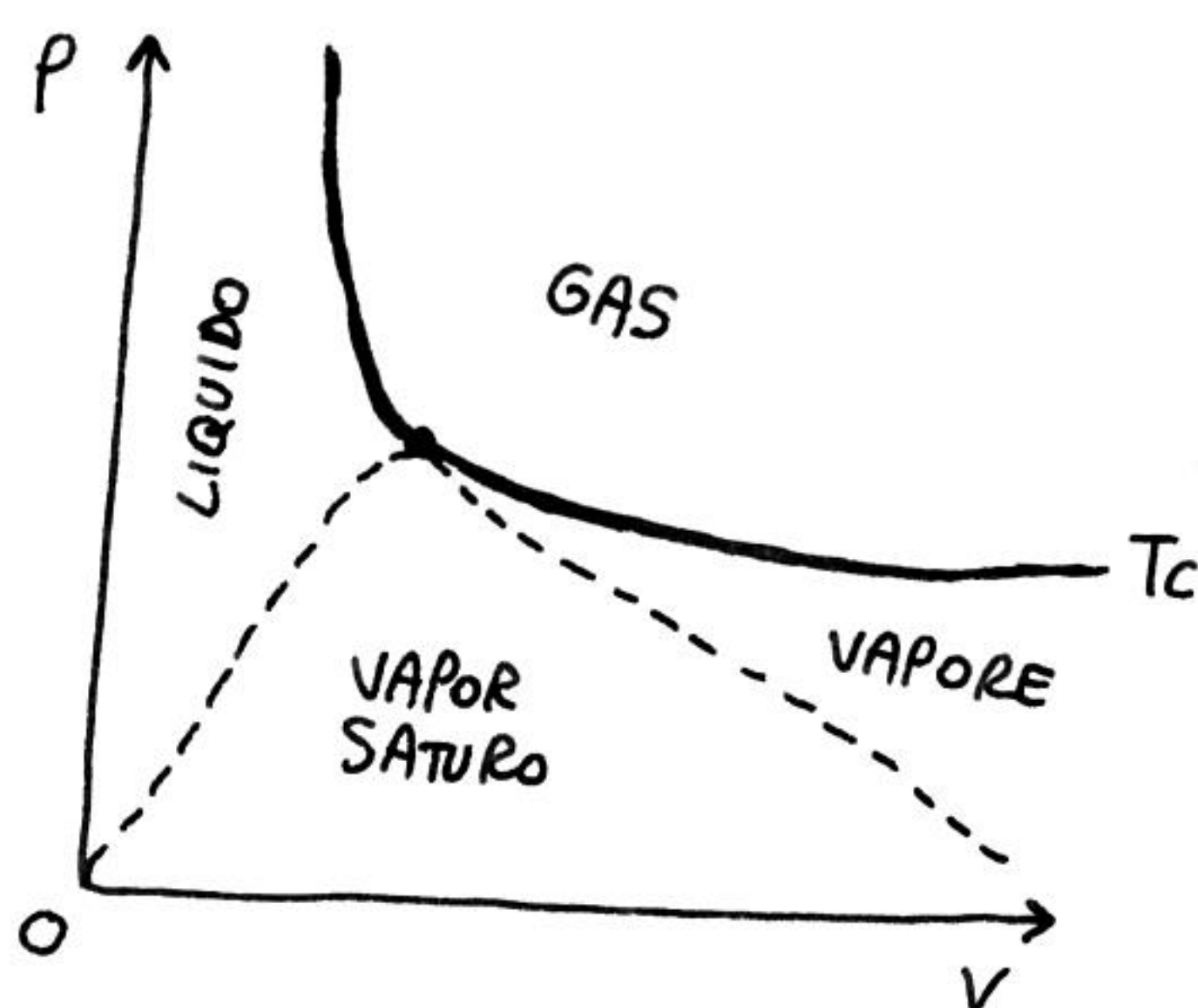
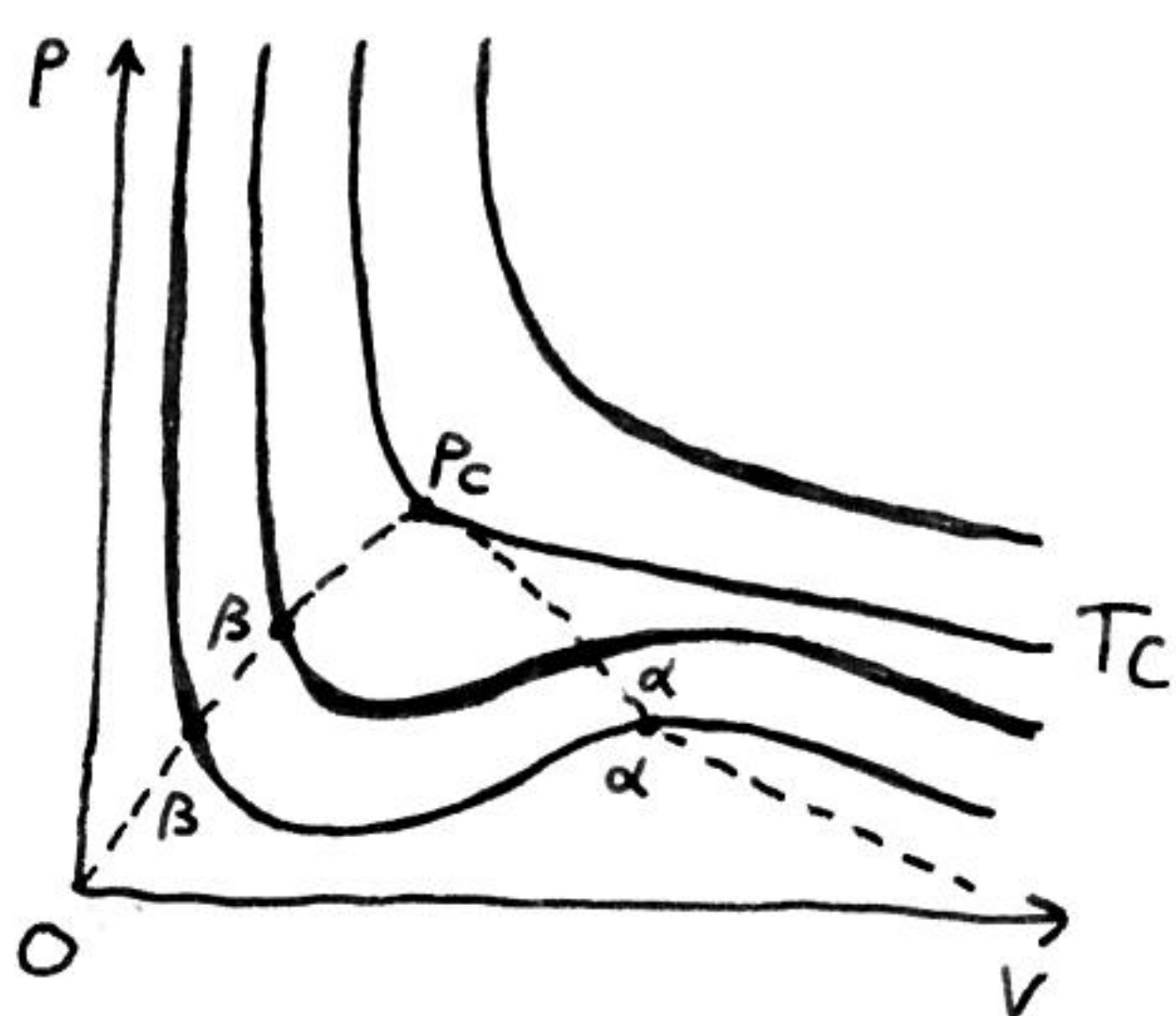
Invece l'equazione di stato di un gas reale e' $\left(p - \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$, che ha grafico:



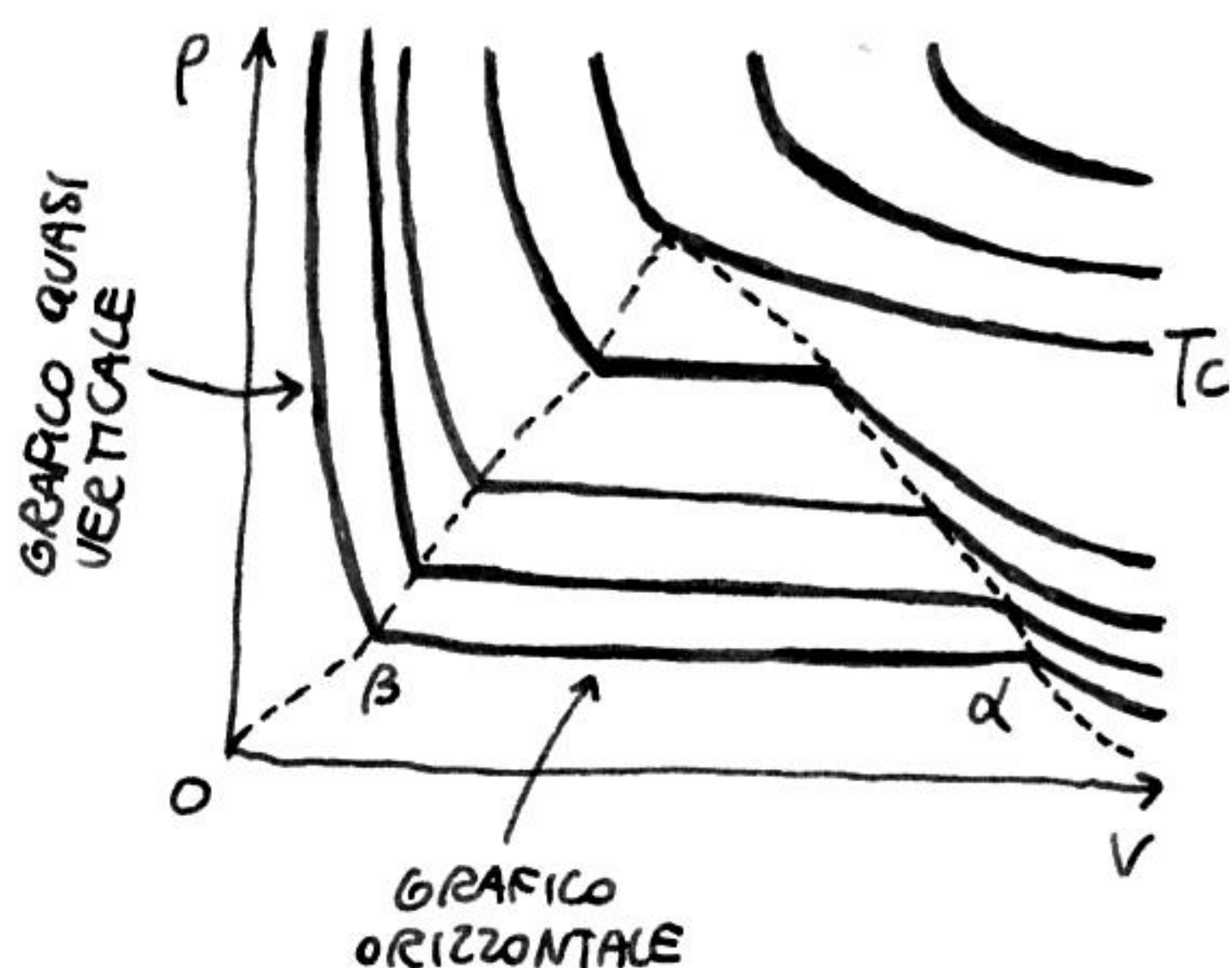
A e B sono rispettivamente un punto di max e uno di min; tra essi c'è un flesso. All'aumentare della temperatura questi due punti si avvicinano, finché sulla T_c (ISOTERMA CRITICA) coincidono in un punto di flesso orizzontale (PUNTO CRITICO).

In α il gas inizia a condensarsi e appaiono delle goccioline; da β in poi il gas è tutto liquido.

Unendo tutti i punti α e tutti i punti β di tutte le isoterme (nella isoterma critica α coincide con β) si ottiene ~~una~~ la CURVA DI ANDREWS che divide il piano in 4 zone:



La zona del vapor saturo non è ~~osservabile~~ ^{riproducibile} sperimentalmente ed è instabile (gli stati α e β sono metastabili e riproducibili sperimentalmente usando gas purissimo). Quindi possiamo disegnare il grafico di un gas reale così:



noi stiamo comprimendo il gas;

in α iniziano ad apparire delle goccioline e anche continuando a comprimere (= diminuire il V), la pressione non aumenta, ma il gas si condensa sempre più;

in β il gas è tutto liquido, e a questo punto una piccolissima compressione ulteriore fa aumentare tantissimo la pressione, ~~che~~ infatti i liquidi sono incompressibili.

La curva di Andrews unisce i punti angolari.

Per condensare un gas bisogna prima scendere sotto la isoterma critica.

Sopra la isoterma critica T_c il grafico e' circa quello di un' iperbole equilatera (quindi senza piu' flessi).

L'aria secca (80% azoto, 20% ossigeno) ha $T_c = -150^\circ\text{C}$, percio' l'aria secca, che e' un gas reale, a temperatura ambiente segue con buona approssimazione la legge $PV = RT$.

Calcoliamoci i valori di p , v e T per il punto critico.

Sappiamo che il punto critico e' un punto di flesso ($\frac{d^2p}{dv^2} = 0$) a tangente orizzontale ($\frac{dp}{dv} = 0$), quindi abbiamo due condizioni.

L'equazione di stato e' $(p + \frac{a}{v^2})(v-b) = RT$, da cui

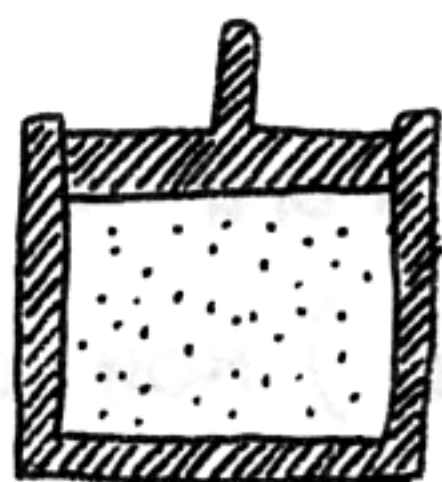
$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} = RT(v-b)^{-1} - a v^{-2}$$

$$\begin{cases} \frac{dp}{dv} = -RT(v-b)^{-2} + 2a v^{-3} = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} = 0 \\ \frac{d^2p}{dv^2} = 2RT(v-b)^{-3} - 6a v^{-4} = \frac{2RT}{(v-b)^3} - \frac{6a}{v^4} = 0 \end{cases}$$

dal sistema ricaviamo $v_{\text{punto critico}} = 3b$ $T_{\text{critica}} = \frac{8}{27} \frac{a}{bR}$

e sostituendo nell'equazione precedente il sistema abbiamo $p_{\text{punto critico}} = \frac{a}{27 b^2}$

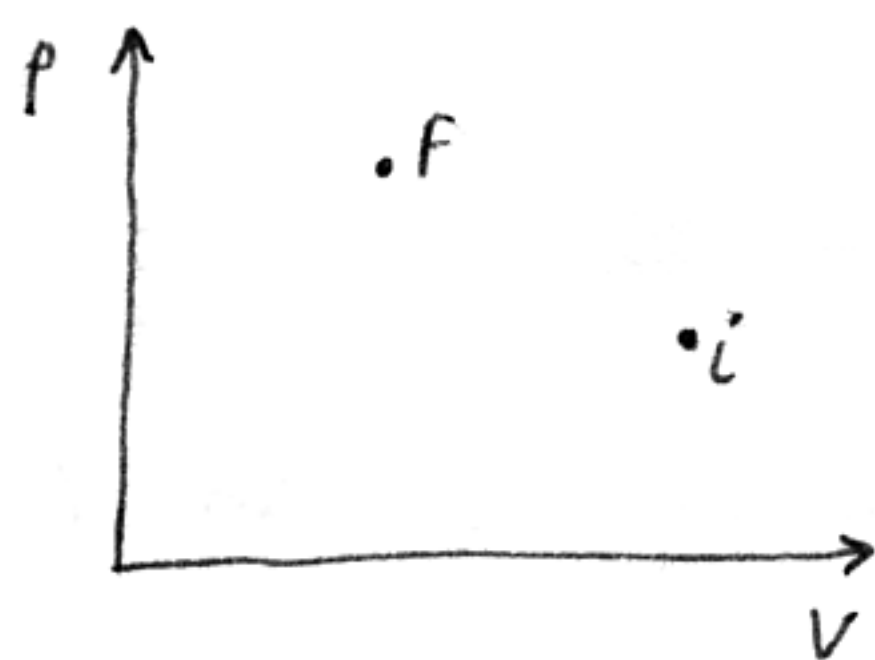
25 ENTROPIA



Sistema in equilibrio a P, V, T ;
vogliamo farlo passare a un altro stato di
equilibrio dove ~~il volume~~ il volume sia dimezzato
alla stessa temperatura



Si abbassa il pistone rapidamente (a $\frac{1}{2}V$);
il gas si riscalda, cede calore all'
ambiente; si attende che il gas torni
in equilibrio termico con l'ambiente.
Durante tale trasformazione il gas è
in regime turbolento e si trova in stati
di non-equilibrio che non possono
essere rappresentati sul diagramma (solo gli
stati iniziale e finale sono in equilibrio).



TRASFORMAZIONE IRREVERSIBILE

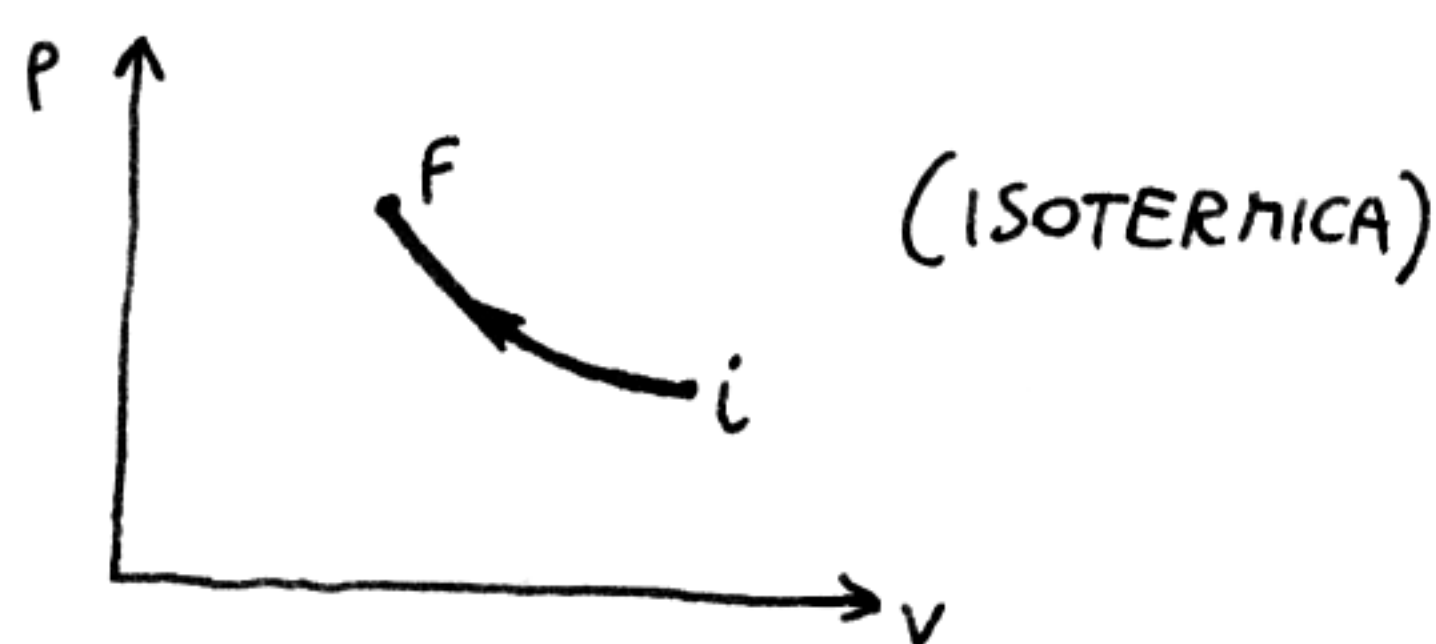


Si abbassa il pistone (aumentando
la pressione) di una piccolissima
quantità (ad es. poggiando sul pistone
dei piccolissimi pesetti); la temperatura
del gas aumenterà leggermente, sco-
standosi di poco dallo stato di equilibrio
vera ceduta una piccolissima quantità
di calore all'ambiente del gas, che
ritornerà quindi alla temperatura iniziale
e a uno stato di equilibrio; il volume
si è ridotto un pochino.

Si ripete questo passaggio finché il
volume non si è dimezzato.

Maggiore è il numero di passaggi,
minori sono le variazioni (di pressione,
volume, temperatura, ecc.) e più gli stati
attraverso i quali passa il sistema
assomigliano a stati di equilibrio;
per variazioni infinitesime, il sistema
passa attraverso stati di equilibrio che
possono essere raffigurati su un dia-
gramma $p-V$.

Durante questa trasformazione il sistema
ha ceduto calore all'ambiente.



TRASFORMAZIONE REVERSIBILE

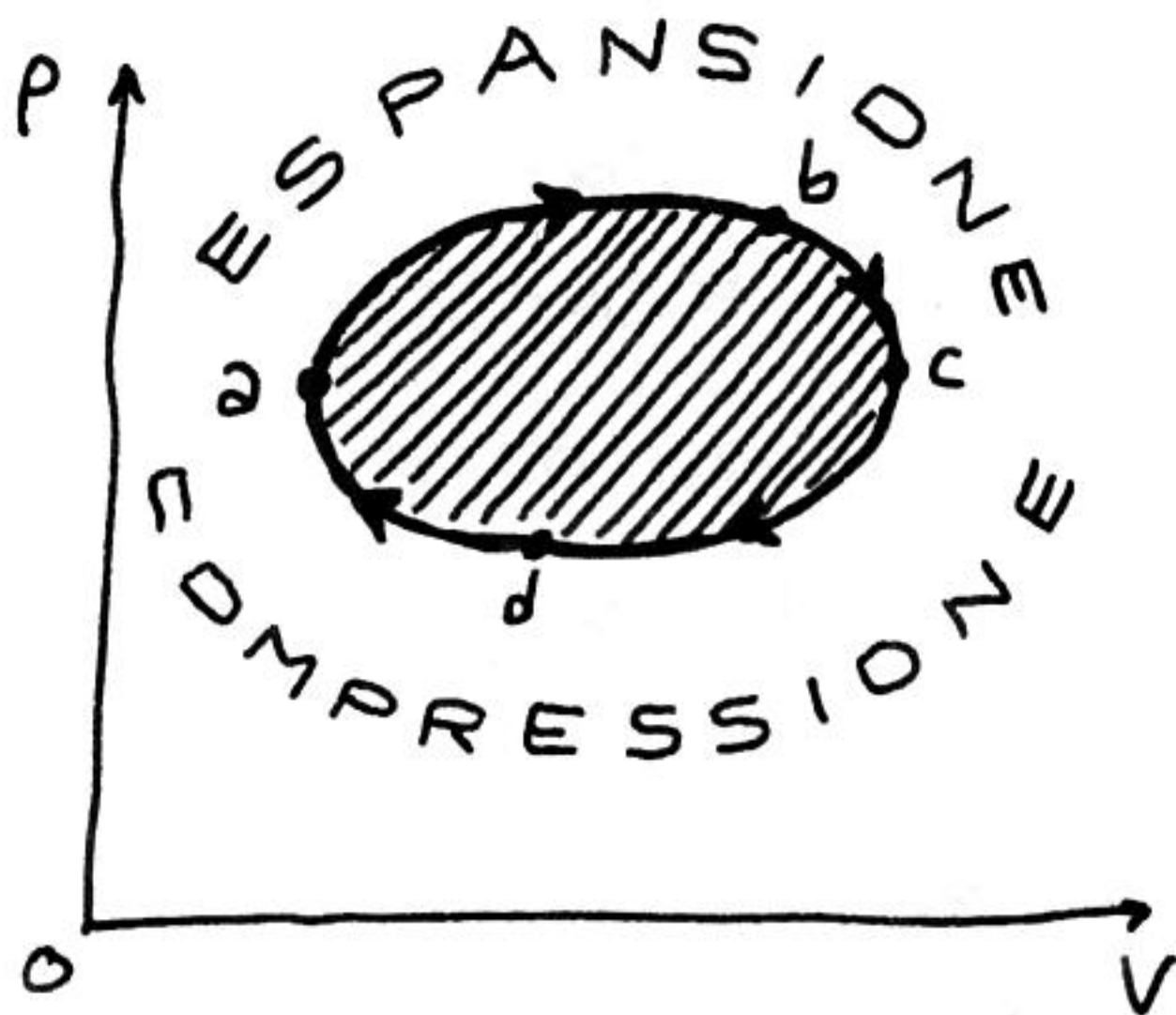
Una trasformazione è reversibile quando, per mezzo di una variazione infinitesima nell'ambiente esterno, può essere ripercorsa in senso inverso.

Tutte le trasformazioni sono irreversibili in realtà;
la trasformazione reversibile è "ideale".

Esistono trasformazioni adiabatiche reversibili e irreversibili.
Per esse il lavoro L (e quindi ΔU e ΔT) non è lo stesso,
perché, essendo $L = \int p dV$, dipende dalla velocità con cui il pistone è abbassato.

CICLO: Serie di trasformazioni in cui lo stato finale del sistema coincide con lo stato iniziale.

Se tutte le trasformazioni sono reversibili si parla di CICLO REVERSIBILE

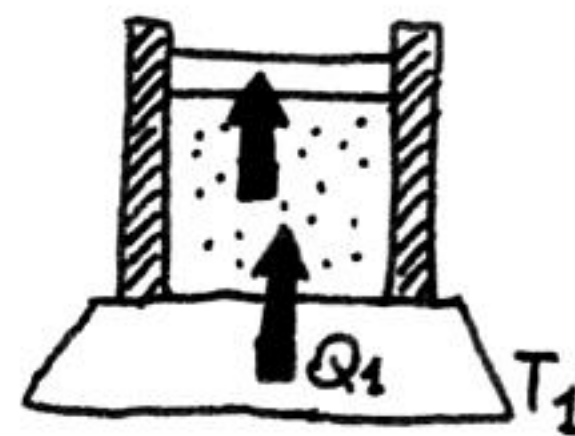
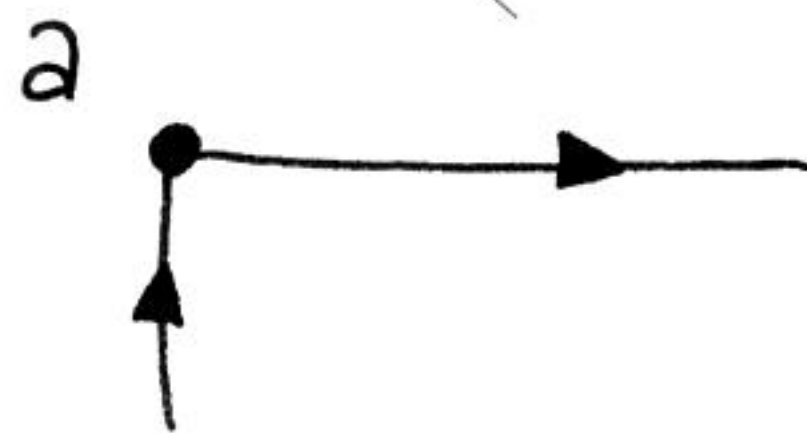
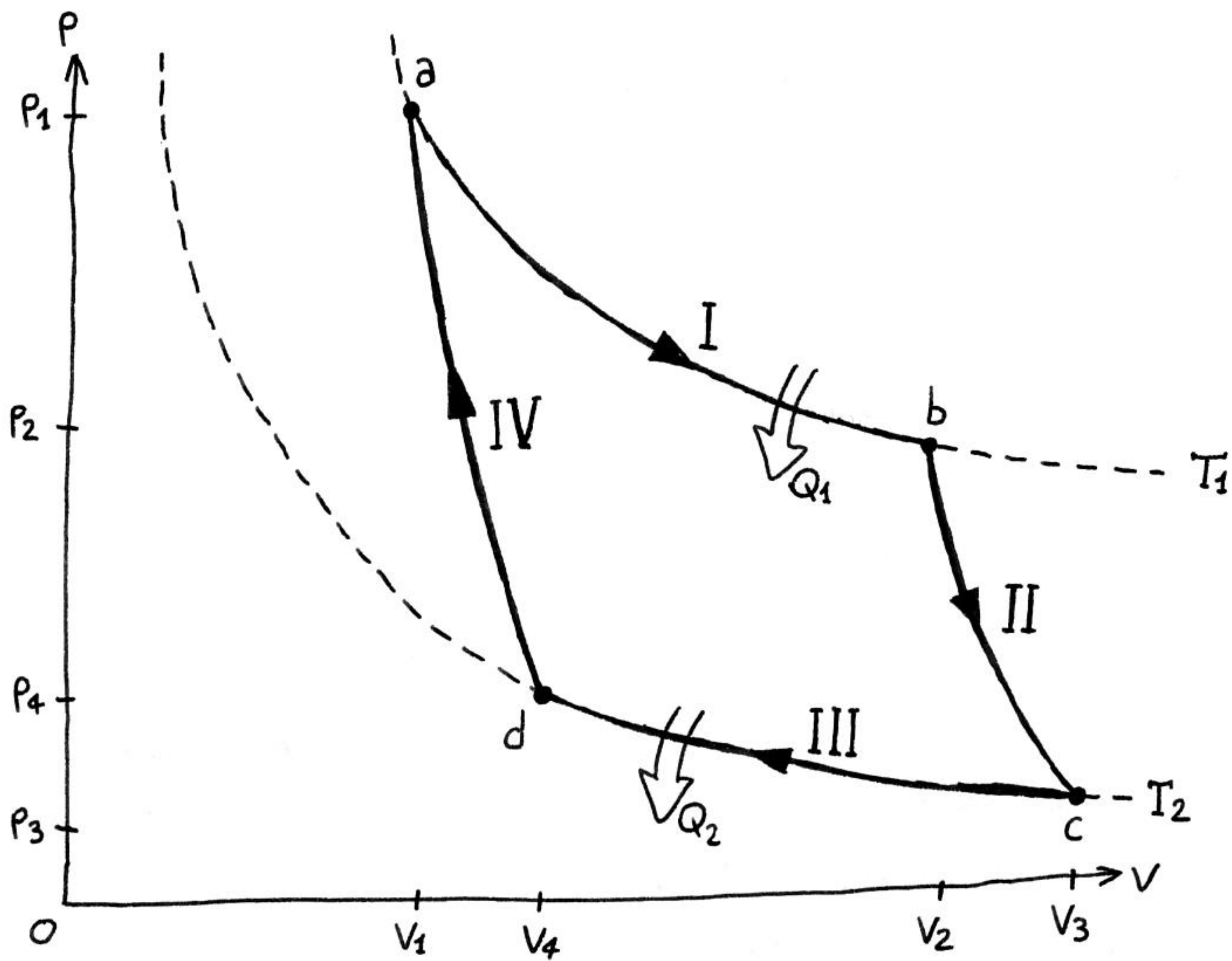


$$L_{TOT} = L_{abc} - L_{cda} = \text{///}$$

Il lavoro totale è pari all'area dentro il ciclo.

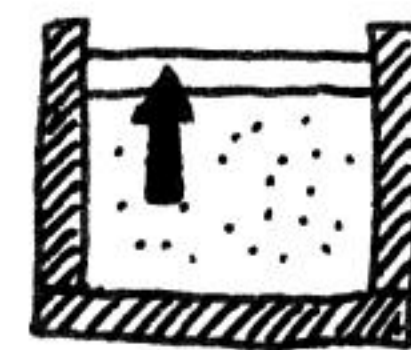
Se venisse compiuto tale ciclo in senso inverso, il lavoro totale sarebbe lo stesso, cambiato di segno.

CICLO DI CARNOT



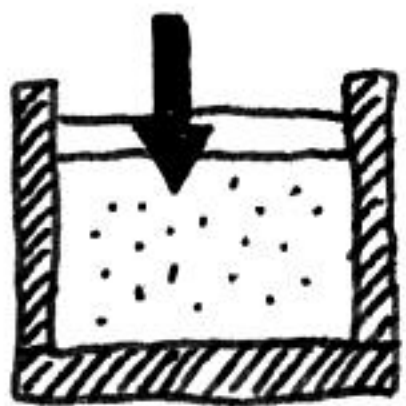
I ISOTERMA

il gas compie lavoro
 $P_1 \rightarrow P_2 \downarrow$
 $V_1 \rightarrow V_2 \uparrow$
 $T_1 =$
 viene fornito calore Q_1



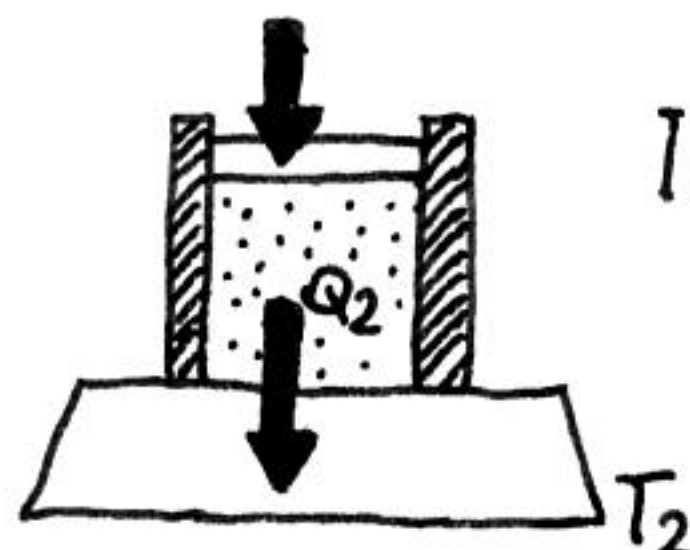
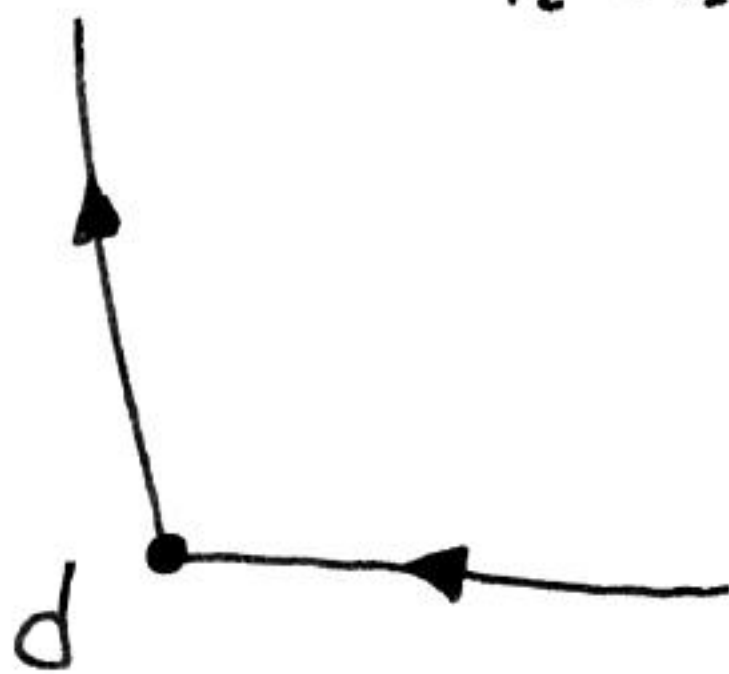
II ADIABATICA

il gas compie lavoro
 $P_2 \rightarrow P_3 \downarrow$
 $V_2 \rightarrow V_3 \uparrow$
 $T_1 \rightarrow T_2 \downarrow$



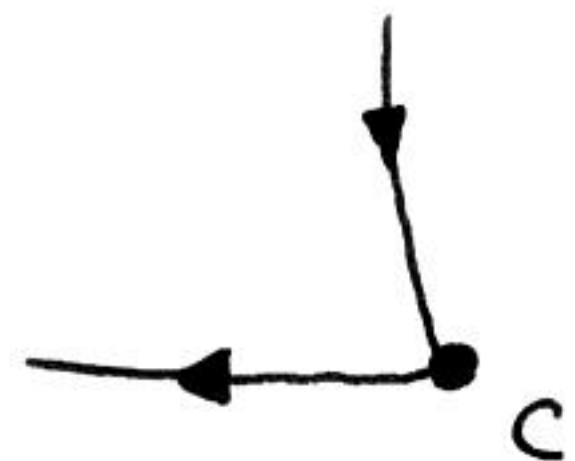
IV ADIABATICA

il pistone compie lavoro sul gas
 $P_4 \rightarrow P_1 \uparrow$
 $V_4 \rightarrow V_1 \downarrow$
 $T_2 \rightarrow T_1 \uparrow$



III ISOTERMA

il pistone compie lavoro sul gas
 $P_3 \rightarrow P_4 \uparrow$
 $V_3 \rightarrow V_4 \downarrow$
 $T_2 =$
 il gas rende calore Q_2



CICLO DI CARNOT

È un ciclo reversibile: agisce come una macchina termica, fornendo lavoro dal calore. In questo caso la sostanza operante è un gas perfetto, ma si possono usare diverse sostanze (vapore, carburante + aria, ossigeno + aria, ecc.) e in tal caso il diagramma sarà diverso.

Il sistema prende una quantità di calore Q_1 a temperatura T_1 , restituisce una quantità di calore Q_2 a temperatura più bassa T_2 e compiendo un lavoro L rappresentato dall'area racchiusa nel ciclo abcd; stato iniziale e finale del gas coincidono, e si ha $L = Q_1 - Q_2$.

Il ciclo di Carnot può iniziare da qualunque punto. Compiuto al contrario, il sistema assorbe calore Q_2 a temperatura T_2 ed espelle calore Q_1 a temperatura più alta T_1 , assorbendo anche lavoro (energia); quindi agisce come frigorifero, prelevando calore dai cibi freddi all'interno ed espellendolo fuori nell'ambiente più caldo, purché gli si fornisca energia elettrica.

Il rendimento della macchina termica è il rapporto tra lavoro ottenuto e calore fornito:

$$e = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Rendimento della macchina termica inversa (frigorifero):

$$e = \frac{Q_2}{L} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

CICLO DI CARNOT

Calcoliamo il rendimento di una macchina termica che compie il ciclo di Carnot.

La prima trasformazione ab è compiuta lungo l'isoterma T_1 , lo stato interno del gas non subisce variazioni e quindi il lavoro ottenuto è pari al calore fornito:

$$L_1 = Q_1 = n R T_1 \log \frac{V_2}{V_1} \quad (\text{come visto in precedenza})$$

Lo stesso per la trasformazione cd lungo l'isoterma T_2 :

$$L_2 = Q_2 = n R T_2 \log \frac{V_3}{V_4} \quad (\text{qui il lavoro è negativo, perciò abbiamo invertito il segno: per le proprietà del log } -n R T_2 \log \frac{V_4}{V_3} = n R T_2 \log \frac{V_3}{V_4})$$

Si ottiene quindi:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n R T_1 \log \frac{V_2}{V_1}}{n R T_2 \log \frac{V_3}{V_4}} = \frac{T_1}{T_2} \frac{\log \frac{V_2}{V_1}}{\log \frac{V_3}{V_4}}$$

Ora, per la I e III trasformazione (isoterme):

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

$$P_3 V_3 = P_4 V_4$$

e per la II e IV trasformazione (adiabatiche):

$$P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma$$

$$P_4 V_4^\gamma = P_1 V_1^\gamma$$

Si ottiene quindi, moltiplicando membro a membro:

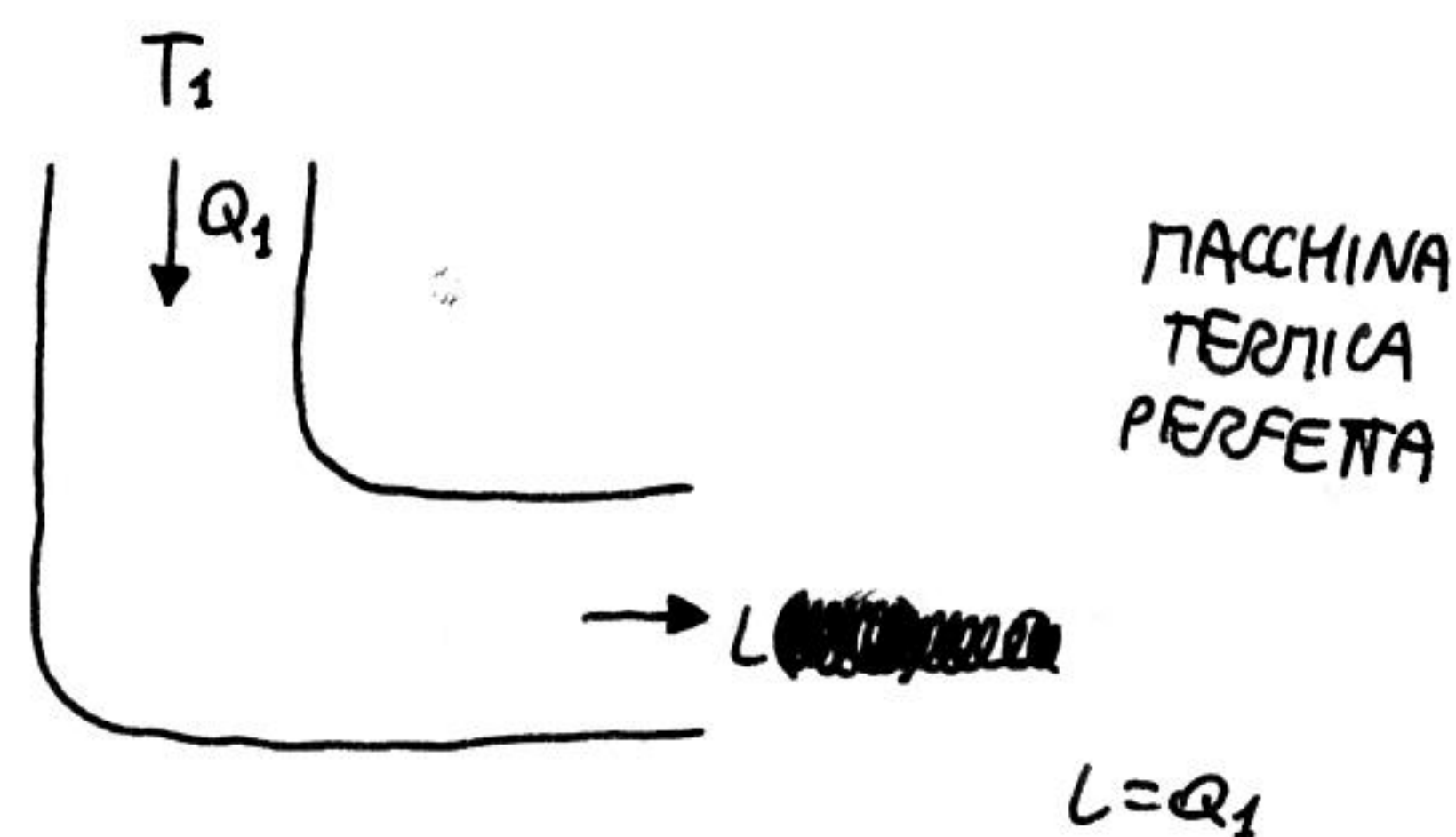
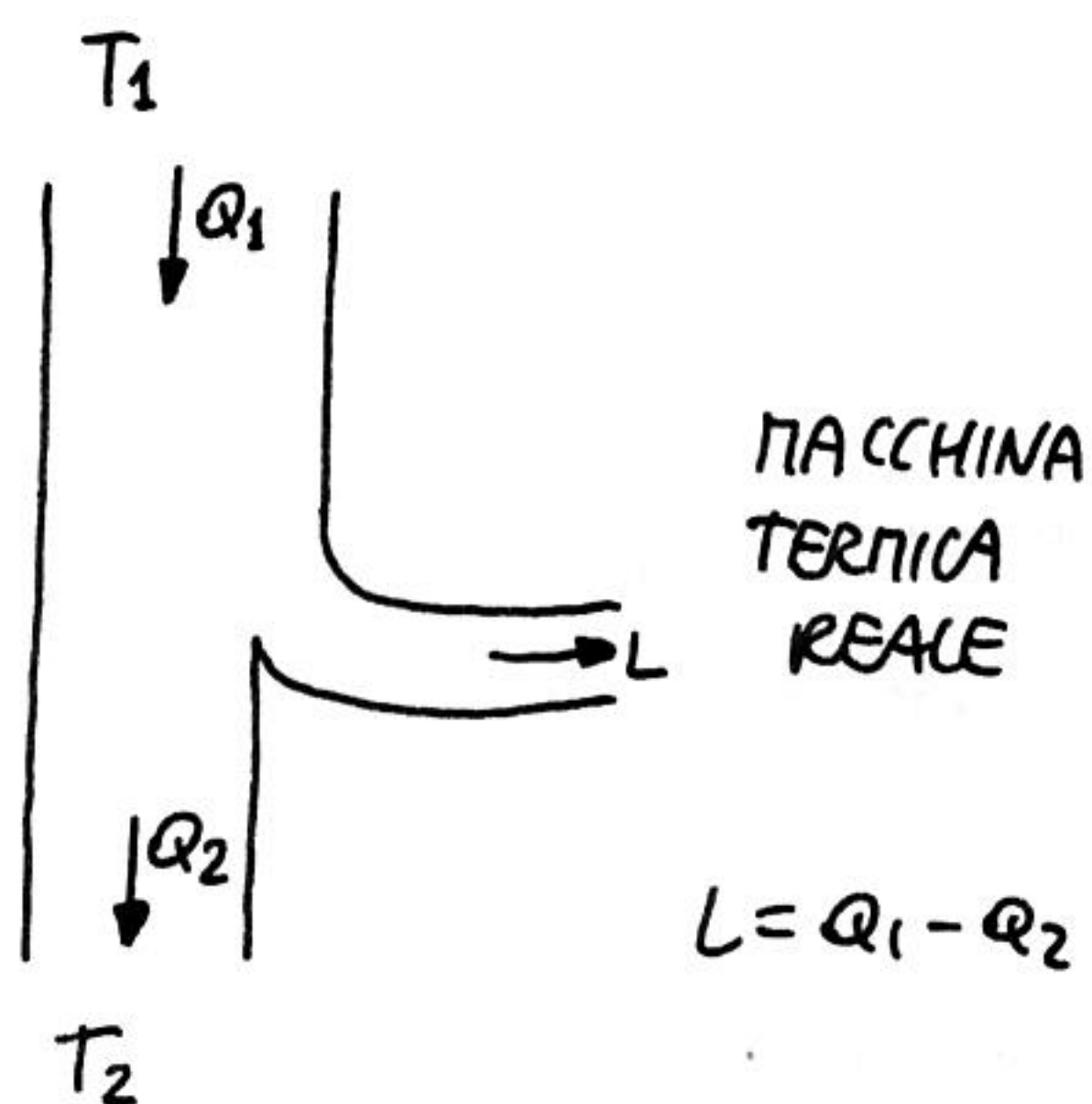
$$P_1 V_1 P_3 V_3 P_2 V_2^\gamma P_4 V_4^\gamma = P_2 V_2 P_4 V_4 P_3 V_3^\gamma P_1 V_1^\gamma$$

$$\text{cioè } V_1 V_3 V_2^\gamma V_4^\gamma = V_2 V_4 V_3^\gamma V_1^\gamma$$

$$\text{cioè } (V_2 V_4)^{\gamma-1} = (V_3 V_1)^{\gamma-1} \quad \text{cioè } V_2 V_4 = V_3 V_1 \quad \text{cioè } \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

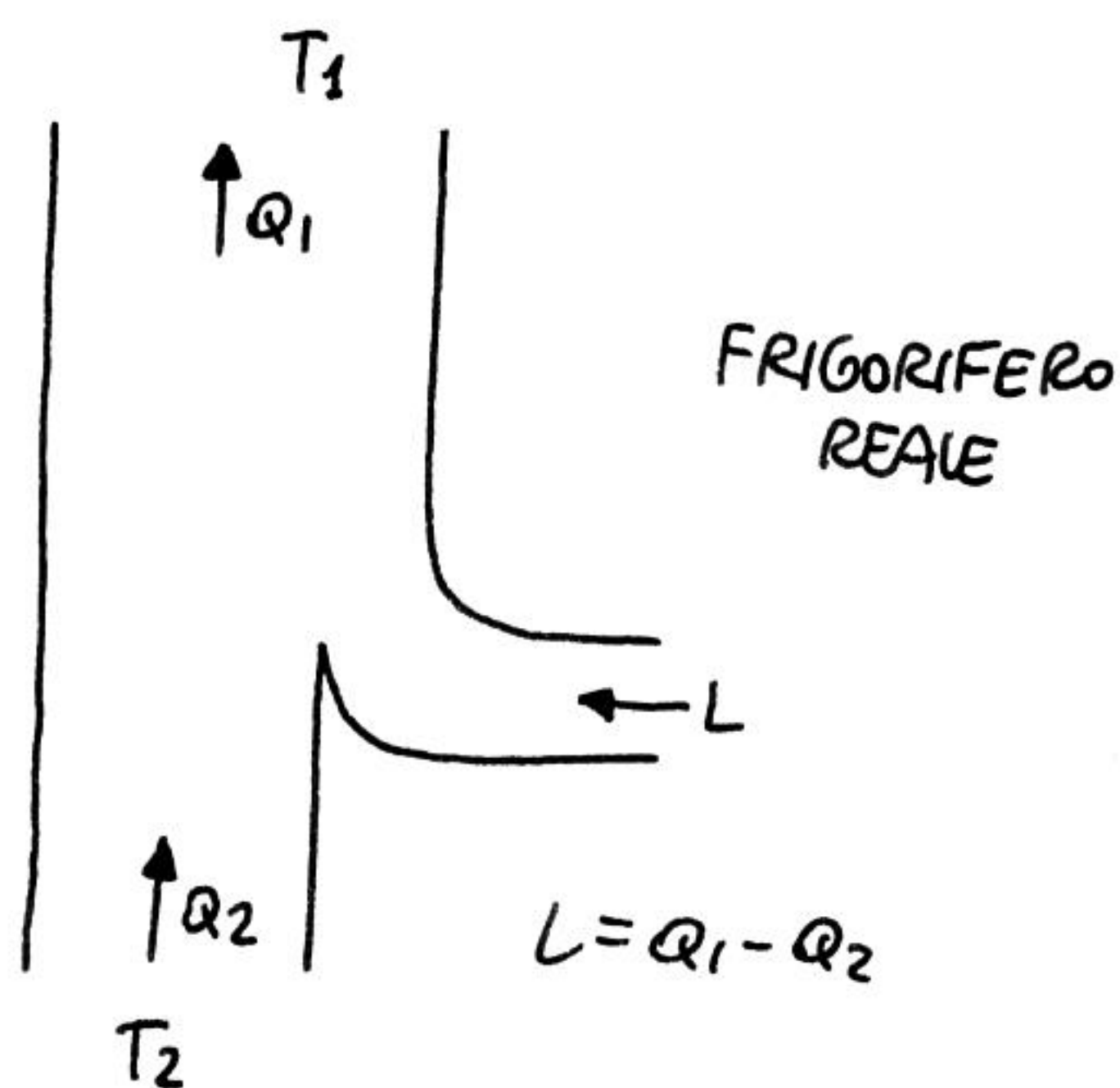
$$\text{Abbiamo quindi } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \frac{\log \frac{V_2}{V_1}}{\log \frac{V_3}{V_4}} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\text{Perciò il rendimento è } e = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \text{ovvero } \boxed{e = \frac{T_1 - T_2}{T_1}}$$



Parte della quantità di calore Q_1 viene trasformata in lavoro L , ma parte (Q_2) viene resa all'ambiente a temperatura più bassa

Tutto il calore viene trasformato in lavoro



E' necessario lavoro per trasferire calore da una zona fredda all'ambiente esterno più caldo

Il calore fluisce dalla zona fredda alla zona calda senza che si debba fare ~~nessun~~ alcun lavoro

Nessuna di queste macchine perfette viola il 1° principio della termodinamica, ma il 2° principio della termodinamica, che specifica quali processi avvengono e possono avvenire in natura, afferma che tali macchine perfette non possono esistere.

2° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA:

(Clausius) "E' impossibile che una macchina termica produca come unico risultato, senza nessun altra modifica di stato, un trasferimento continuo di calore da un corpo a un altro che si trova a temperatura più alta"
(FRIGORIFERO)

(Kelvin-Planck) "E' impossibile che una macchina termica produca lavoro prelevando del calore da una sorgente che si trova tutta alla stessa temperatura e trasformandolo tutto in lavoro (deve restituire una parte del calore a temperatura più bassa)"
(MACCHINA TERMICA)

A rigore, non e' impossibile (ma e' molto improbabile) che in un bicchiere d'acqua tiepida si formi ghiaccio + acqua bollente, perché le molecole veloci (calde) potrebbero andare da una parte e quelle lente (fredde) dall'altra. In pratica però ciò non avviene mai.

Il 2° principio della termodinamica, che e' una generalizzazione dell'evidenza sperimentale e ci indica quali processi possono o no avvenire in natura, dice appunto che ciò e' impossibile.

Tale 2° principio ci dice anche che il calore non può trasferirsi da un corpo freddo a uno caldo (sebbene ciò, secondo il 1° principio, non sia, a rigore, impossibile) e quindi fissa ~~la~~ la direzione del trasferimento di calore. Se vogliamo trasferire calore da un corpo freddo a uno caldo dobbiamo fornire del lavoro.

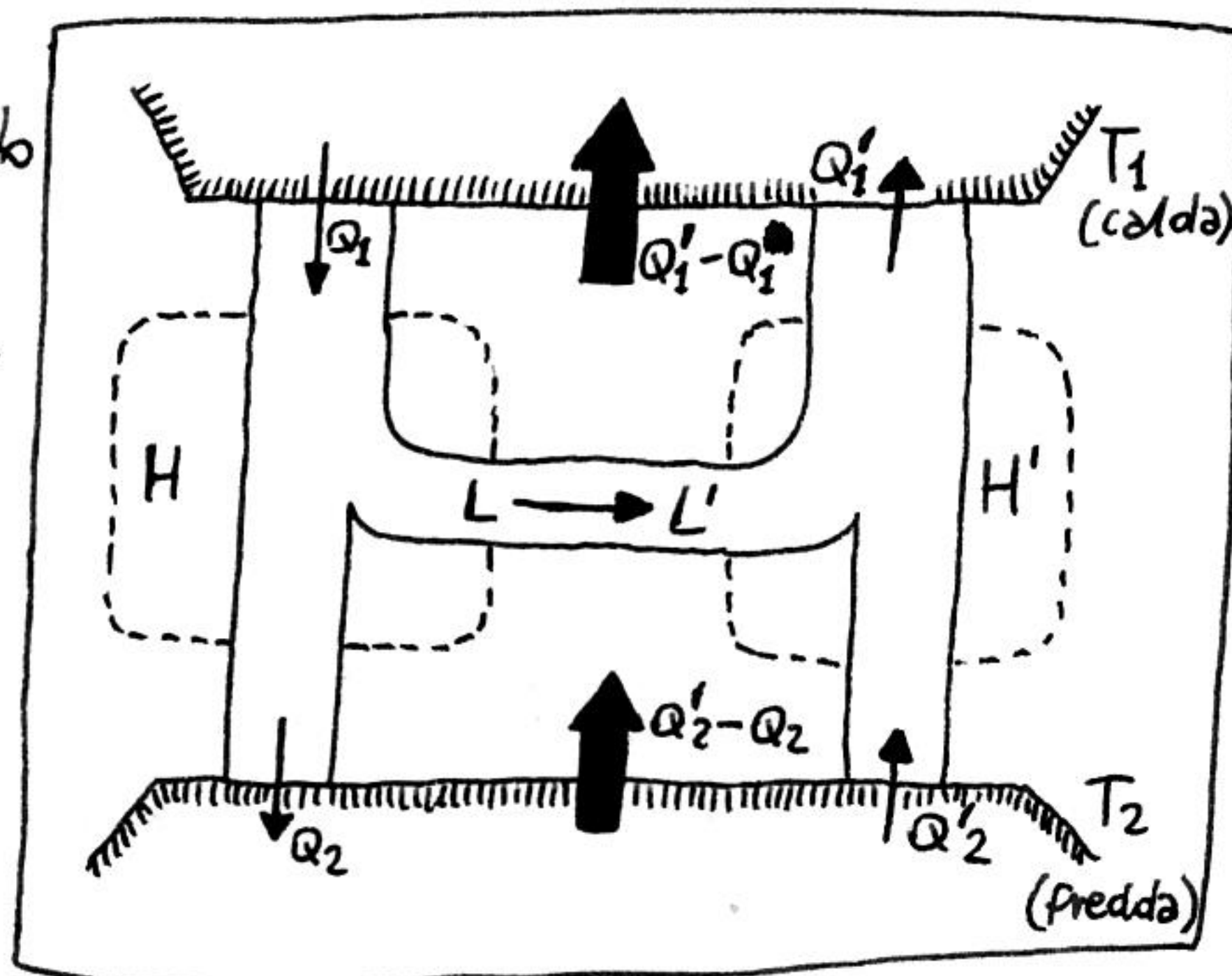
Questo 2° principio ci indica il corso più probabile degli eventi, non l'unico possibile, a rigore. Ma la probabilità che la natura lo contraddica e' irrilevante.

TEOREMA DI CARNOT: "Il rendimento di tutte le macchine reversibili che operano tra due stesse sorgenti è il medesimo. Nessuna macchina irreversibile può avere rendimento maggiore di una macchina reversibile che lavori tra le stesse sorgenti."

~~Importante~~ Il rendimento di una macchina reversibile è il più alto possibile, fra due determinate sorgenti, e non dipende dalla sostanza che compie la trasformazione.

► Dimostrazione della prima parte del teorema di Carnot:

H ed H' sono due macchine termiche di rendimento rispettivamente e ed e' (H' lavora invertita ed è quindi un frigorifero); possono essere differenti per sostanza e pressione; collegiamole in modo che il lavoro L per ciclo compiuto da H sia sufficiente a far funzionare H' .



H e H' lavorano fra le stesse sorgenti T_1 e T_2 ; dimostriamo che deve essere $e = e'$.

Supponiamo per assurdo che sia $e > e'$ ~~cioè~~ $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} > \frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1'}$.

Abbiamo $L = L'$ ovvero $Q_1 - Q_2 = Q_1' - Q_2'$. (Con $L > 0, L' > 0$).

Deve essere quindi, dall'ipotesi, $\frac{1}{Q_1} > \frac{1}{Q_1'}$ ovvero $Q_1 < Q_1'$ cioè $Q_1' - Q_1 > 0$.

Essendo $Q_1 - Q_2 = Q_1' - Q_2'$ si ha anche $Q_2 < Q_2'$ cioè $Q_2' - Q_2 > 0$.

Quindi il risultato di tutto questo processo è che:

La sorgente T_2 cede la quantità di calore $Q_2' - Q_2$, mentre la sorgente T_1 acquista la quantità di calore $Q_1' - Q_1$ (quantità entrambe positive); si è avuto cioè un trasferimento di calore da una sorgente fredda a una calda senza aver fornito lavoro (il lavoro L compiuto da H è fornito ad H' per funzionare). Ciò va contro il 2° principio della termodinamica.

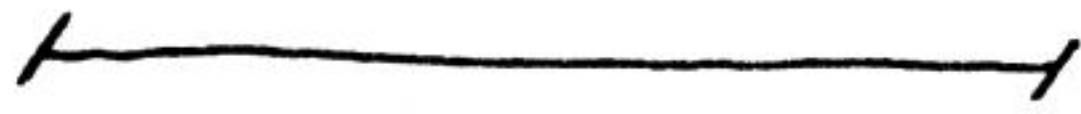
~~Supponiamo per assurdo che sia $e < e'$~~ Invertendo ~~le due macchine~~, si dimostra che si arriva ad un assurdo anche per $e < e'$.

Perciò deve essere $e = e'$, c.v.d.

● Dimostrazione della seconda parte del teorema di Carnot:

H sia ora una macchina irreversibile, con rendimento e_{irr} ; dimostriamo che deve essere $e_{irr} \leq e'$.

Col medesimo procedimento dimostriamo che è assurdo che sia $e_{irr} > e'$.
Siccome non possiamo invertire H perché è una macchina irreversibile.
Perciò abbiamo che deve essere $e_{irr} \leq e'$, c.v.d.



Il rendimento di una macchina termica, $e = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$, dipende solo dalle temperature delle sorgenti tra le quali lavora. Quindi anche Q_1 e Q_2 , le quantità di calore trasferte, dipendono solo dalla temperatura.
Possiamo quindi definire una nuova scala, la

SCALA TERMODINAMICA ASSOLUTA DELLE TEMPERATURE o SCALA KELVIN

dove la nuova temperatura θ è definita dalla relazione $\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{Q_1}{Q_2}$.

Assegniamo ora il valore arbitrario di $273,16^\circ\text{K}$ alla temperatura del punto triplo dell'acqua nella nuova scala, cioè $\theta_{\text{TRIPLO}} = 273,16^\circ\text{K}$.

Essendo $\frac{\theta}{\theta_{\text{TRIPLO}}} = \frac{Q}{Q_{\text{TRIPLO}}}$, si ha dunque $\theta = 273,16^\circ\text{K} \frac{Q}{Q_{\text{TRIPLO}}}$, che è la

stessa equazione di definizione della temperatura ~~calcolata~~ calcolata col termometro a gas a volume costante, $T = 273,16^\circ\text{K} \lim_{P \rightarrow P_{\text{TRIPLO}}} \frac{P}{P_{\text{TRIPLO}}}$.

Quindi Q gioca il ruolo di una proprietà termometrica, ed è indipendente dalla sostanza utilizzata.

Essendo $e = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ e anche $\theta_{\text{TRIPLO}} = T_{\text{TRIPLO}} = 273,16^\circ\text{K}$,

si ha $\theta = T$. Quindi usando un gas perfetto nel termometro a gas a volume costante, questo ci darebbe la temperatura misurata con questa scala Kelvin vista ora.

Quindi scala del gas perfetto = scala Kelvin.

Non possiamo ottenere gas a temperatura sotto 1°K . Quindi per misurare temperature sotto 1°K utilizziamo direttamente la scala termodinamica.

$$\frac{T}{T_{\text{triplo}}} = \frac{Q}{Q_{\text{triplo}}}$$

: il rapporto delle 2 quantità di calore scambiate durante due processi isotermi compresi tra due adiabatiche è uguale al rapporto tra le 2 temperature termodinamiche. Isoterme e ~~isoterme~~ adiabatiche vengono trovate sperimentalmente.

Si vede che minore è T , minore è Q . Il minimo di Q è zero e il T corrispondente è lo zero assoluto.

Perciò una trasformazione isoterma reversibile allo zero assoluto avviene senza trasferimento di calore, e viceversa.

Quindi, allo zero assoluto, trasformazione isoterma = trasformazione adiabatica.

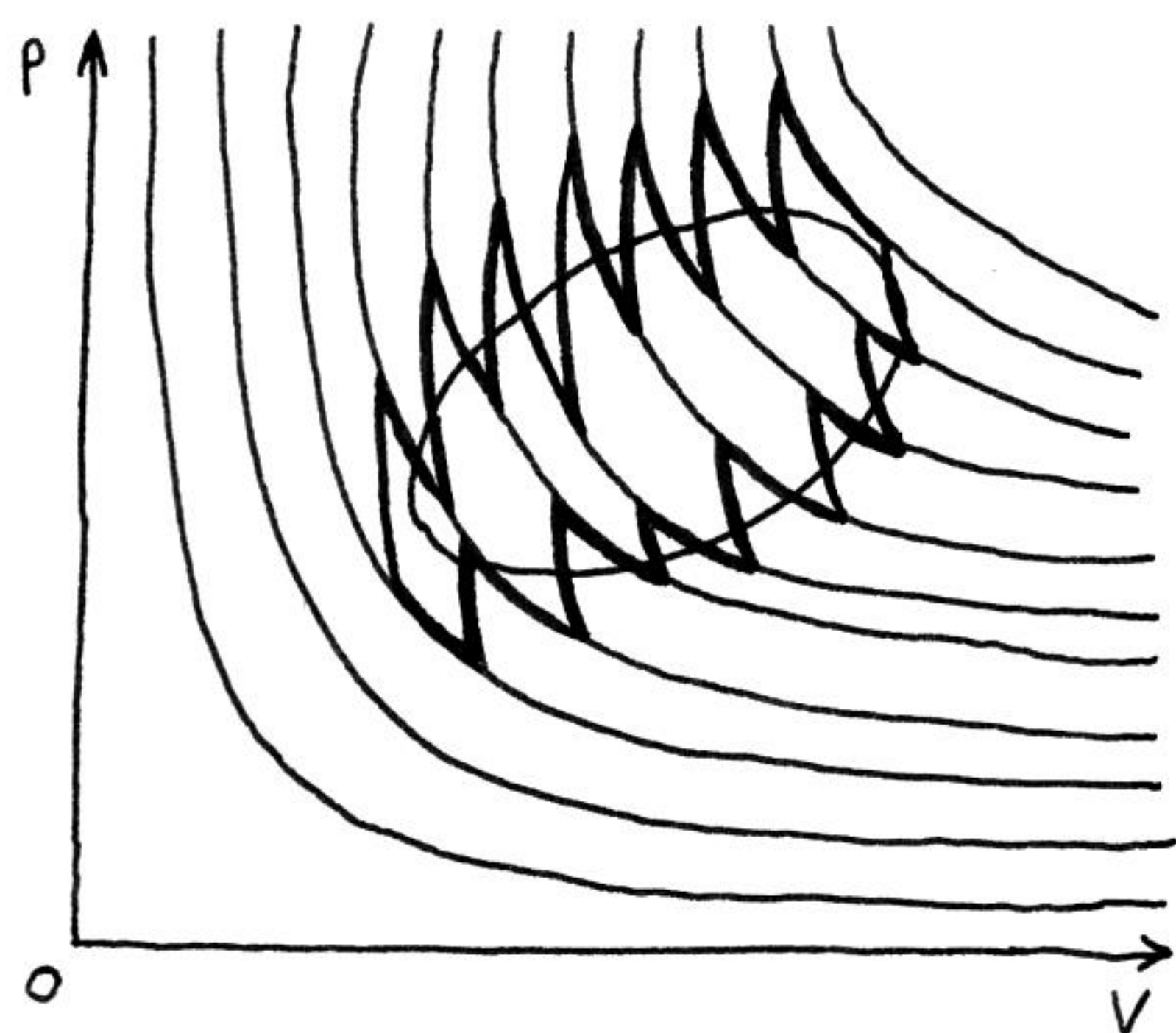
Essendo $e = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, se T_2 è lo zero assoluto, la macchina ha un rendimento del 100%. (Non raggiungibile).

Sperimentalmente si è visto che più bassa è la temperatura, più è difficile abbassarla ulteriormente; da qui il

3° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA: "È impossibile abbassare la temperatura di un sistema fino allo zero assoluto con un numero finito di trasformazioni."

ENTROPIA - TRASFORMAZIONI REVERSIBILI

Abbiamo visto che per un ciclo di Carnot e- $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$ ossia $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$, dove Q sono prese come quantità positive. Considerando invece $Q > 0$ quando il calore entra nel sistema e $Q < 0$ quando ne esce, si ottiene $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$, ovvero la somma totale delle quantità $\frac{Q}{T}$ e- zero.



Possiamo approssimare un ciclo reversibile con un insieme di cicli di Carnot, scegliendo opportune adiabatiche in modo che l'area dentro il ciclo (=L) sia uguale all'area dentro la figura frastagliata. Percorrere il ciclo e- equivalente a percorrere la figura frastagliata, perché i tratti di isoterma compresi tra due cicli di Carnot contigui vengono percorsi prima in un senso e poi nell'altro, con l'effetto finale (lavoro) si annulla a vicenda. Considerando isoterme più vicine, si può rendere l'approssimazione buona quanto si vuole.

$$\text{Si ha quindi } \sum \frac{Q}{T} = 0$$

o, nel caso considerassimo variazioni infinitesime di temperatura tra isoterme, $\oint \frac{dQ}{T} = 0$.

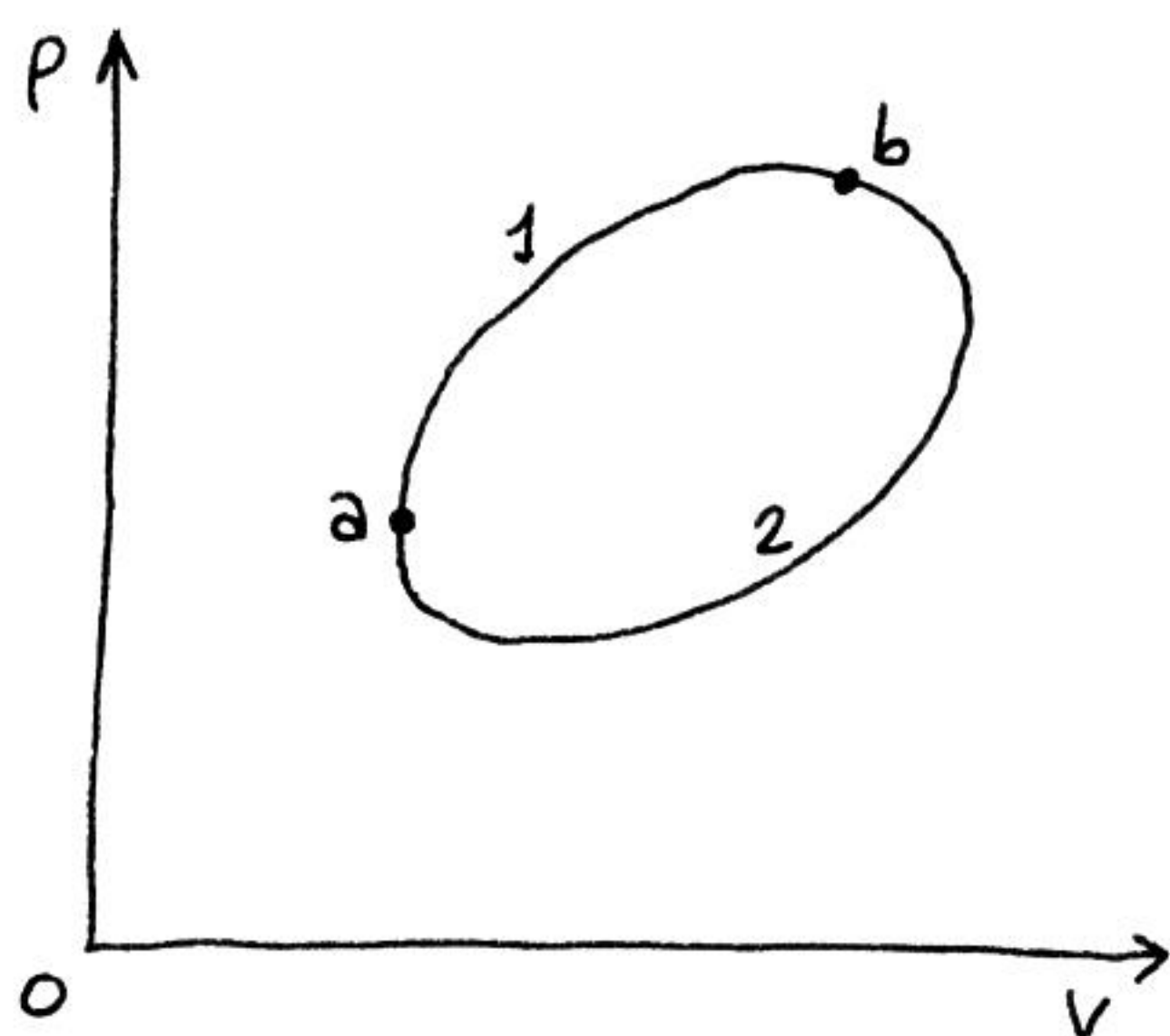
ENTROPIA S

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

$$\oint dS = 0$$

[$\oint$ e- un integrale ciclico, che va calcolato iniziando e finendo da un punto qualsiasi del ciclo. dQ non e- un differenziale esatto, perché Q non e- una funzione di stato del sistema. $dS (= \frac{dQ}{T})$ e- però un differenziale esatto, e quindi e- una funzione di stato del sistema (come p, v, T ma non come Q, L).]

Se X e- una variabile di stato, $\oint dX = 0$, cioè $\int dX$ calcolato tra due qualsiasi punti di equilibrio ha lo stesso valore qualunque sia il percorso che collega questi due punti.



Dimostriamo che per l'entropia vale $\oint dS = 0 \Leftrightarrow \int$ non dipende dal percorso.

$$\oint dS = 0 \rightarrow \int_a^b dS + \int_b^a dS = 0 \rightarrow$$

(invertendo il ciclo lungo $\bar{ba}$, si ottiene)

$$\rightarrow \int_a^b dS - \int_a^b dS = 0 \rightarrow \int_a^b dS = \int_a^b dS \quad \text{c.v.d.}$$

La variazione di entropia ~~tra~~ tra a e b è-

$$S_b - S_a = \int_a^b dS = \int_a^b \frac{\delta Q}{T}$$

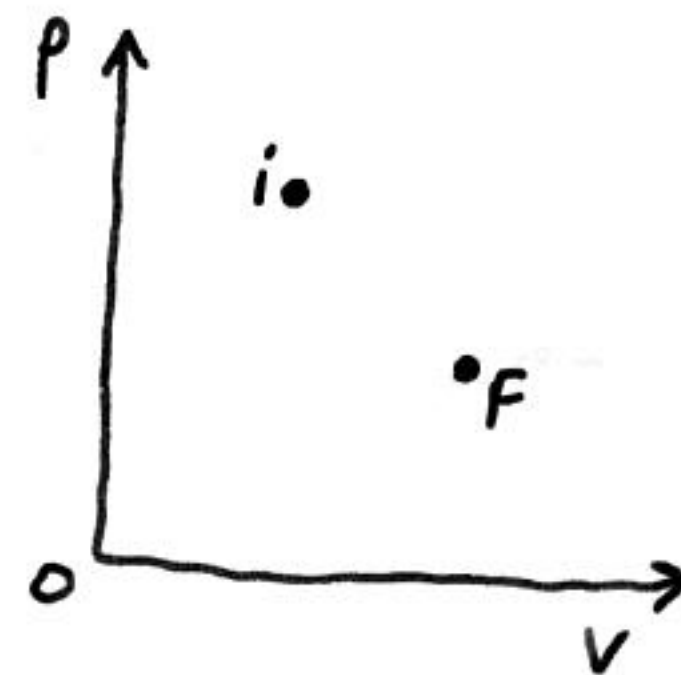
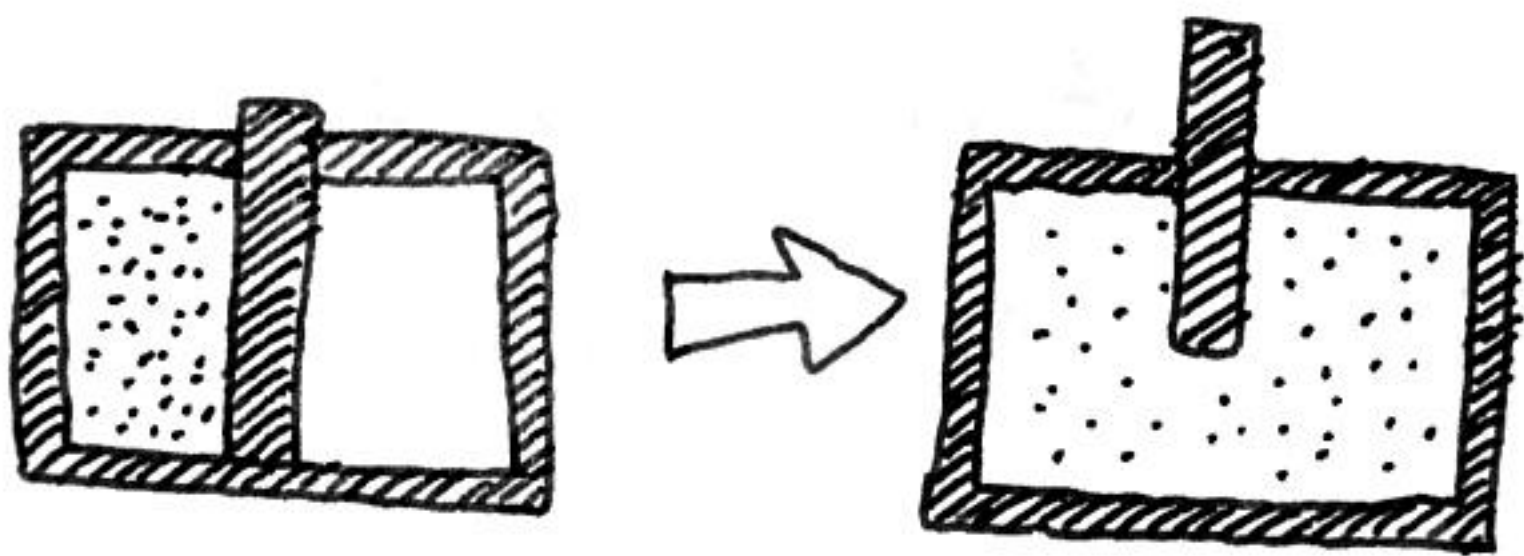
integrale calcolato lungo un qualsiasi cammino reversibile che colleghi a e b .

ENTROPIA - TRASFORMAZIONI IRREVERSIBILI

Poiché l'entropia dipende solo dallo stato di un sistema e non dalla trasformazione compiuta (che in questi casi è irreversibile e quindi non rappresentabile in un diagramma), siamo in grado di calcolare l'entropia conoscendo solo gli stati iniziale e finale del sistema, purché questi siano stati di equilibrio.

■ Espansione libera.

Consideriamo l'espansione libera di un gas in un recipiente isolato tale che il volume raddoppi. $V_f = 2V_i$, $L = 0$, $Q = 0$, $U_f = U_i$ e, se il gas è un gas perfetto, anche $T_f = T_i$ perché U dipende solo dalla temperatura e non da pressione o volume. Gli stati intermedi non sono in equilibrio e quindi non rappresentabili sul diagramma.



Per calcolare la variazione di entropia del sistema, consideriamo una qualsunque trasformazione reversibile tra i ed f; ad esempio una trasformazione isoterma per la quale abbiamo visto che è $L = nRT \log V_f/V_i$.

La variazione di entropia del sistema sarà dunque

$$S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \frac{nRT \log V_f/V_i}{T} = nR \log 2 > 0 \text{ perciò l'entropia del sistema aumenta.}$$

■ Conduzione del calore.

Consideriamo due corpi, uno a T_1 e l'altro a T_2 (con $T_1 > T_2$) in un recipiente isolante; il calore fluisce dal corpo più caldo a quello più freddo e alla fine essi saranno alla stessa temperatura T_m (con $T_1 > T_m > T_2$). Il processo è adiabatico, e irreversibile perché una volta messi i due corpi nella scatola si perde il controllo dell'ambiente esterno.

Per calcolare l'entropia, consideriamo una trasformazione reversibile con gli stessi stati iniziale e finale.

Preleviamo una quantità Q di calore lentamente dal corpo caldo, ~~portandolo~~ ^{varierà} ~~diminuendo~~ abbassando la sua temperatura da T_1 a ~~alla~~ T_m ; la sua entropia ~~diminuirà~~ ^{varierà} di

$$\Delta S_1 = -\frac{Q}{T_{1m}} \quad \text{dove } T_{1m} = \text{temperatura media tra } T_1 \text{ e } T_m. \quad (\text{l'entropia diminuisce})$$

~~Preleviamo~~ Aggiunghiamo ora la temperatura del corpo freddo da T_2 a T_m , fornendogli una quantità di calore Q uguale a quella di prima: la sua entropia aumenterà di $\Delta S_2 = \frac{Q}{T_{2m}}$ dove $T_{2m} = \text{temperatura media tra } T_m \text{ e } T_2$.

La variazione di entropia del sistema è allora

$$S_f - S_i = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -\frac{Q}{T_{1m}} + \frac{Q}{T_{2m}}$$

(l'entropia dell'ambiente non è variata, perché il sistema è isolato dall'esterno)

Poiché $T_{1m} > T_{2m} \Rightarrow \Delta S_1 + \Delta S_2 > 0$ e l'entropia del sistema è aumentata.

Nota: in una trasformazione reversibile, durante il trasferimento di calore sistema e ambiente differiscono per la temperatura solo di una quantità infinitesimale. In questo caso di conduzione di calore irreversibile, la differenza di temperatura dei due corpi posti a contatto è grande.

2° Principio della Termodinamica formulato in termini di entropia:

"Una trasformazione naturale che inizia e termina in stati di equilibrio si svolge sempre in ~~una~~ direzione tale da causare un aumento dell'entropia di { sistema + ambiente }"

Tale principio si applica solo alle trasformazioni irreversibili, perché solo queste hanno una direzione naturale.

Le trasformazioni reversibili possono procedere in un senso o nell'altro, perciò per esse l'entropia totale rimane costante; infatti se dQ è trasportato dal sistema all'ambiente, l'entropia del sistema diminuisce di $\frac{dQ}{T}$ e quella dell'ambiente aumenta di $\frac{dQ}{T}$.

Calcolare la variazione di entropia di un gas perfetto in un'espansione isoterma reversibile da V_i a V_f .

$$U = Q - L \quad dU = dQ - dL$$

$$L = \int p dV \quad \text{quindi} \quad dU = dQ - p dV$$

$$dU = 0 \quad \text{perché il processo è isoterma quindi} \quad dQ = p dV$$

$$pV = nRT \quad p = \frac{nRT}{V} \quad \text{quindi} \quad dQ = \frac{nRT}{V} dV$$

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \cdot \frac{nRT}{V} dV = nR \frac{dV}{V}$$

$$S_f - S_i = \int_{V_i}^{V_f} dS = \int_{V_i}^{V_f} nR \frac{1}{V} dV = nR \log \frac{V_f}{V_i}$$

(come già visto nel calcolo dell'entropia di una trasformazione adiabatica)

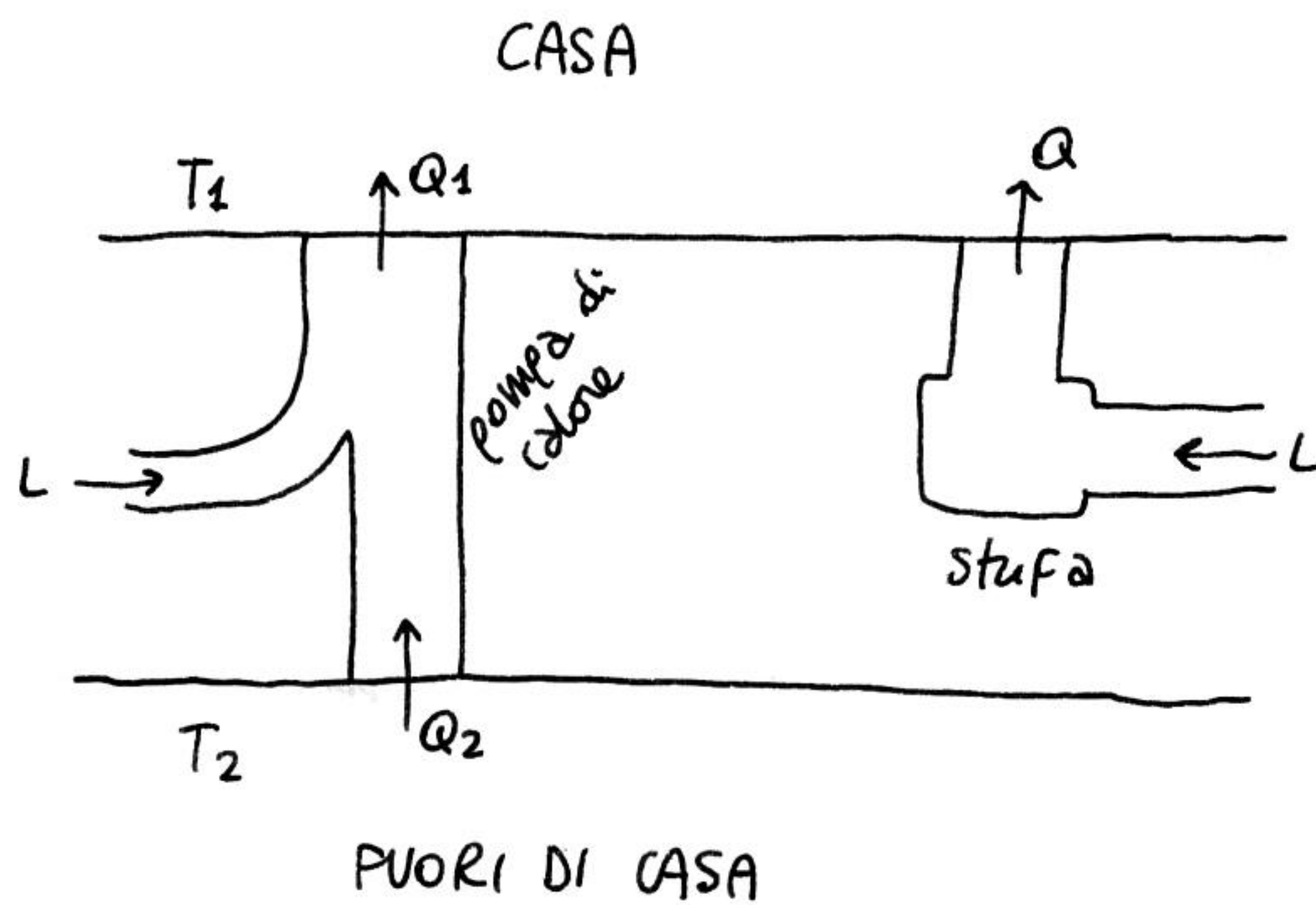
$V_f > V_i \rightarrow \log \frac{V_f}{V_i} > 0 \rightarrow S_f - S_i > 0$ cioè l'entropia del gas (sistema) è aumentata di quella quantità.

L'entropia dell'ambiente è diminuita di quella stessa quantità.

Entropia = Disordine = Diminuzione della nostra capacità di classificare gli oggetti

I processi naturali evolvono verso la situazione più probabile, cioè verso stati di maggiore entropia.

Lo stato più probabile è lo stato di entropia massima (stato di equilibrio dal punto di vista termodinamico).



la pompa di calore
è una macchina tecnica
che lavora in senso inverso
(come un frigorifero)

La pompa di calore è migliore della stufa perché preleva anche calore dall'esterno e quindi a parità di calore fornito necessita di meno lavoro per funzionare ($L = Q_1 - Q_2$) ed è x questo che è migliore a Copenaghen che non a Helsinki.

$$V = U + V'$$

TRASFORMAZIONI GALILEIANE

$$V = \frac{U + V'}{1 + \frac{UV'}{C^2}}$$

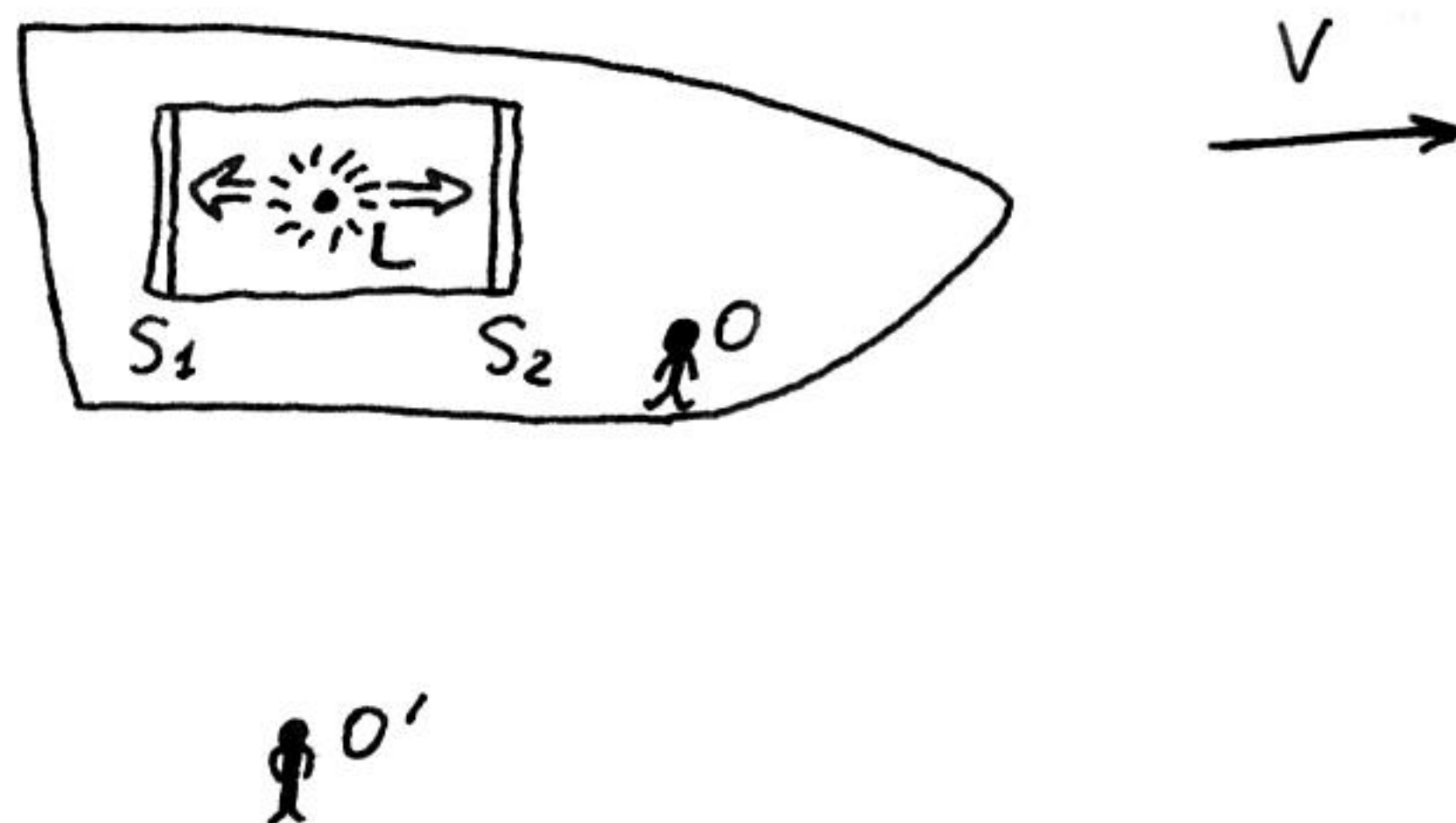
TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

(Teoria della Relatività Ristretta) per velocità prossime a C

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}$$

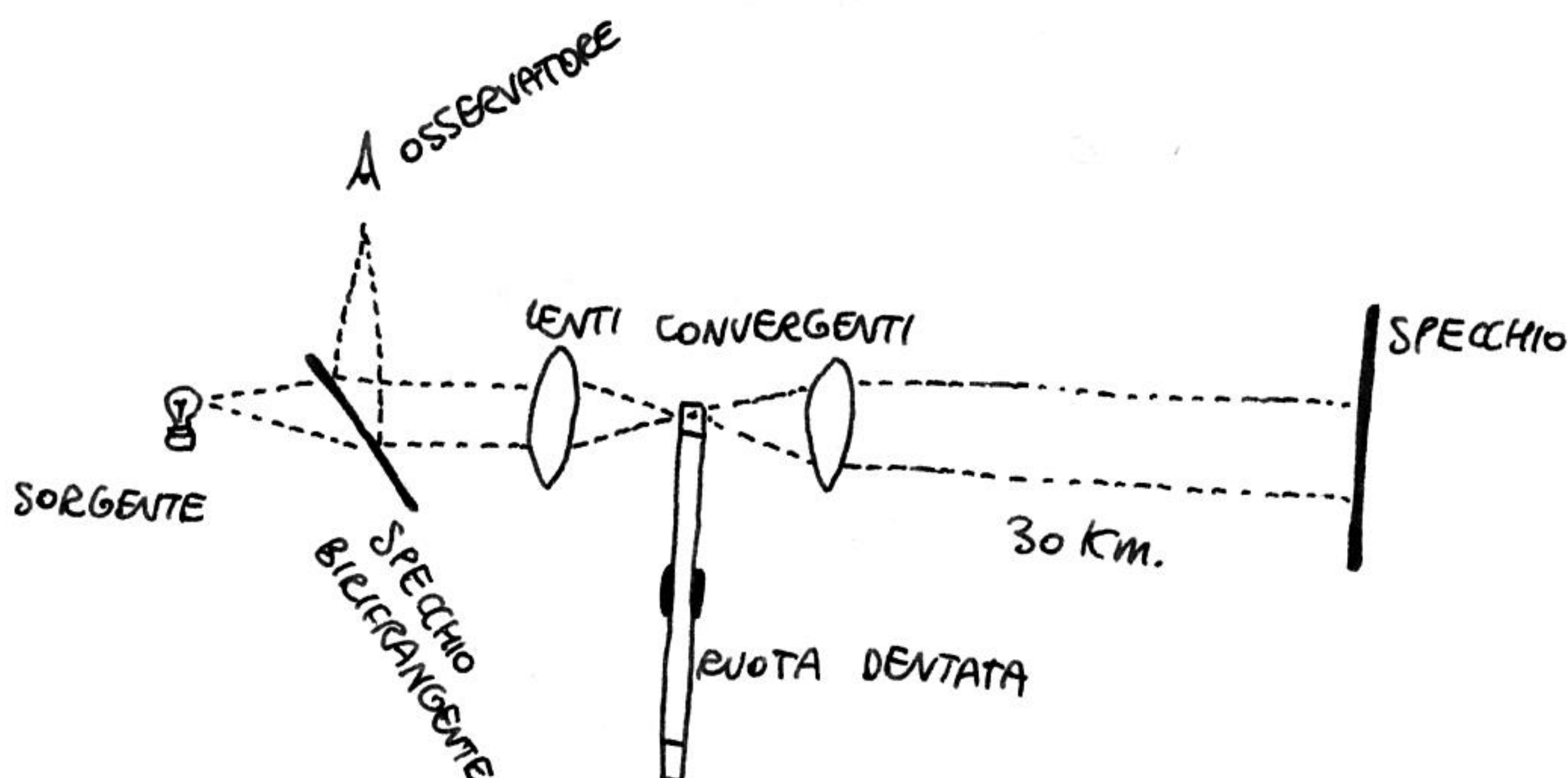
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}$$

CONTRAZIONI DI SPAZIO E TEMPO
per oggetti che abbiano una velocità V
prossima a C



un lampo di luce da L
colpisce gli schermi S_1 e S_2 ,
nello stesso momento per O ;
per O' viene invece colpito prima
 S_2 e poi S_1 , a causa della
velocità V dell'astronave.
Ciò è assurdo perché un
fenomeno fisico non deve mutare
i tempi in cui si verifica, se
visto da due diversi sist. di rif.
Perciò per la velocità della luce
non valgono le trasform. Galileiane

ESPERIMENTO DI FIZEAU per la determinazione della velocità della luce



Oggi si utilizza una
Cella di Kerr
dove un liquido
trasparente diventa
birifrangente quando
è attraversato da
corrente

Raggio di un atomo	10^{-10} m
Raggio del Sole	70'000 Km
Raggio della Terra	6'000 Km
Raggio della Luna	1'700 Km

Massa di un atomo	10^{-26} Kg
Massa di un elettrone	10^{-31} Kg
Massa Sole	10^{30} Kg
Massa Terra	10^{24} Kg
Massa Luna	10^{22} Kg

• Densità ρ (Kg/dm³)

Acqua	1	Platino	21
Aria	10^{-3}	Alluminio	2,7
Romano	...	Mercurio	13
...	...	Ferro	8
Terra (crosta)	2,8		
Terra (nucleo)	9,5		
Terra (media)	5,5		
Sole (media)	1,4		

• Calore specifico c ($\frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$)

Acqua	1
Rame	0,1
Argento	0,05

• Conduttività termica k ($\frac{\text{cal}}{\text{m}^\circ\text{K sec}}$)

Rame	0,8
Argento	1
Aria	$6 \cdot 10^{-3}$
Silicio	$0,9 \cdot 10^{-3}$
Ghiaccio	$0,4 \cdot 10^{-3}$